Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Blatt 8 Abgabe bis Donnerstag 14.12.2006 um 11:00 Uhr

Aufgabe 28) (a) Seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und disjunkt. Sei

$$M_i = \mathbb{R}^n \backslash A_i \quad \text{für } i = 1,2 \text{ sowie} \quad M = \mathbb{R}^n \backslash (A_1 \cup A_2).$$

Zeige, dass für $i \geq 1$ gilt:

$$H^i(M) = H^i(M_1) \oplus H^i(M_2).$$

(b) Betrachte die folgenden Teilmengen vom $\mathbb{R}^3$:

$$S^1 = \{(x,y,0) | x^2 + y^2 = 1\}, \quad G_1 = \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\},$$

$$G_2 = \{(2,0,z) | z \in \mathbb{R}\} \quad \text{und } P = \{(1,0,0)\}.$$

Berechne die Kohomologie $H^i(M)$ folgender Mannigfaltigkeiten M:

$$M_1 = \mathbb{R}^3 \backslash (G_1 \cup P), \qquad M_2 = \mathbb{R}^3 \backslash S^1,$$

$$M_3 = \mathbb{R}^3 \backslash (S^1 \cup G_1), \qquad M_4 = \mathbb{R}^3 \backslash (G_1 \cup P \cup G_2).$$

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 29) (a) Gegeben sei ein endlicher Komplex endlichdimensionaler Vektorräume:

$$0 \to V^0 \to V^1 \to \ldots \to V^n \to 0.$$

Zeige:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \dim(V^i) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \dim(H^i(V^\bullet)).$$

(3 Punkte)

Aufgabe 30) Folgere aus dem Satz von Stokes und den Aufgaben 18) und 25), dass ein komplexes Polynom $f(z)$ vom Grad n genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat, wenn man diese mit ihrer Vielfachheit zählt.

Tipp: Benutze Aufgabe 19), wobei $x_0 = 0$, und $x_1, \ldots, x_k$ die Nullstellen von f in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ seien.

(4 Punkte)

Aufgabe 31) (a) Seien $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ und $N = \bigcup_{j \in J} N_j$ Mannigfaltigkeiten mit Kartenabbildungen $\phi_i : M_i \tilde{\to} U_i \subset \mathbb{R}^m$ und $\psi_j : N_j \tilde{\to} V_j \subset \mathbb{R}^n$. Wir versehen $P = M \times N$ mit der Produkttopologie, setzen $K = I \times J$ und definieren für $k = (i, j) \in K$:

$$P_k = M_i \times N_j, \qquad W_k = U_i \times V_j \subset \mathbb{R}^{n+m},$$

$$\sigma_k : P_k \to W_k, \qquad (m, n) \mapsto (\phi_i(m), \psi_j(n)).$$

Zeige, dass damit ein Atlas für eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf P definiert wird. P heißt Produktmannigfaltigkeit von M und N.

(b) Für $\omega = (\omega_i)_{i \in I} \in A^\alpha(M)$ und $\eta = (\eta_j)_{j \in J} \in A^\beta(N)$ sowie $k = (i, j) \in K$ definieren wir:

$$\sigma_k = \pi_1^*(\omega_i) \wedge \pi_2^*(\eta_j),$$

wobei $\pi_1 : W_k \to U_i$ die erste und $\pi_2 : W_k \to V_j$ die zweite Projektion sei. Zeige, dass $\sigma = (\sigma_k)_{k \in K}$ eine Differentialform auf P ist: $\sigma \in A^{\alpha+\beta}(P)$.

(4= 2+2 Punkte)