Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Blatt 7 Abgabe bis Donnerstag 07.12.2006 um 11:00 Uhr

Aufgabe 24) Sei $M = \bigcup_{i=1}^{N} M_i$ eine endliche Überdeckung einer kompakten Mannigfaltigkeit M durch offene Mengen M_i zusammen mit Kartenabbildungen $\psi_i : M_i \tilde{\to} U_i \subset \mathbb{R}^n$. Für $i = 2, \ldots, N$ sei jeweils $A_i = U_i \backslash U_{i1}$ eine Lebesgue-Nullmenge im $\mathbb{R}^n$. (Hierbei ist $U_{i1} = \psi_i(M_i \cap M_1)$.)

Zeige, dass für $\omega \in A^n(M)$ gilt

$$(\psi_1^{-1})^* \omega = f \cdot dx$$

mit $dx = dx_{\{1,\ldots,n\}}$ und einer auf U_1 Lebesgue-integrierbaren Funktion f, und dass gilt:

$$\int_M \omega = \int_{U_1} f(x) dx$$

(4 Punkte)

Aufgabe 25) (a) In den Bezeichnungen der Aufgabe 18) berechne man für $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\int_S \frac{dz}{z - z_0},$$

wobei $S = \partial K_r(z_0)$ der Rand der Kreisscheibe vom Radius r um z_0 ist.

(b) Für ein Polynom f mit k-facher Nullstelle bei z_0, d.h. $f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ mit $g(z_0) \neq 0$ zeige man

$$\frac{f'(z)}{f(z)} dz = k \cdot \frac{dz}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 26) Berechne $\int_{S^2} \omega$ für

$$\omega \quad = \quad z \cdot dx \wedge dy + x \cdot dy \wedge dz + y \cdot dz \wedge dx.$$

(Hinweis: Man kann frühere Aufgaben verwenden, z.B. Aufgabe 41) aus Ana 2 oder die Aufgaben 4),10),24).)

(3 Punkte)

Aufgabe 27) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0, 1 \in I$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $t \in I$ sei $\phi_t : U \to I \times U,\ x \mapsto (t, x)$. Für $i \geq 1$ sei die Abbildung $\eta = \eta_i : A^i(I \times U) \to A^{i-1}(U)$ definiert durch

$$\eta\left(\sum_{|J|=i} \omega_J \cdot dx_J + \sum_{|J|=i-1} \widetilde{\omega_J} \cdot dt \wedge dx_J\right) = \sum_{|J|=i-1} \left(\int_0^1 \widetilde{\omega_J}(t,x)\ dt\right) dx_J,$$

wobei J jeweils alle Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ mit der angegebenen Mächigkeit durchläuft und $x_1, \ldots, x_n$ die Koordinaten im $\mathbb{R}^n$ sind. Weiterhin sei $A^{-1}(U) = 0$ und $\eta_0 = 0$. Zeige

$$\phi_1^* - \phi_0^* \quad = \quad d \circ \eta_i + \eta_{i+1} \circ d : \quad A^i(I \times U) \to A^i(U).$$

(b) Zeige, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die Abbildungen ϕ_0^* und ϕ_1^* als Abbildungen von $H^i(I \times U)$ nach $H^i(U)$ übereinstimmen.

(c) Sei U sternförmig mit Sternpunkt P und I sei so klein, dass

$$\psi : I \times U \to U, \qquad (t, x) \mapsto (1-t)x + t \cdot P$$

definiert sei. Zeige, dass $\phi_0^* \circ \psi^* : H^i(U) \to H^i(U)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ die Identität und $\phi_1^* \circ \psi^* : H^i(U) \to H^i(U)$ für $i \geq 1$ die Nullabbildung ist. Welche Aussage folgt daraus in Kombination mit (b)?

(6=3+1+2 Punkte)