Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Blatt 6 Abgabe bis Donnerstag 30.11.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben!

Aufgabe 19) Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ sind bezüglich der euklidischen Standardmetrik die offene Kugel $K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n | d(x,y) < r\}$ und die abgeschlossene Kugel $\overline{K_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n | d(x,y) \leq r\}$ definiert. Gegeben seien Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ und Radien $r_0, r_1, \ldots, r_k$, so dass gilt:

$$\overline{K_{r_i}(x_i)} \cap \overline{K_{r_j}(x_j)} = \emptyset \qquad \text{für } 1 \leq i < j \leq k \qquad \text{sowie}$$

$$\overline{K_{r_i}(x_i)} \subset K_{r_0}(x_0) \qquad \text{für } 1 \leq i \leq k.$$

Zeigen Sie, dass $M = \overline{K_{r_0}(x_0)} \backslash \bigcup_{i=1}^k K_{r_i}(x_i)$ mit der vom $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie kompakt ist. Konstruieren Sie auf M die Struktur einer kompakten Mannigfaltigkeit mit Rand, die auf der offenen Teilmenge $M' = K_{r_0}(x_0) \backslash \bigcup_{i=1}^k \overline{K_{r_i}(x_i)}$ mit der Mannigfaltigkeitsstruktur einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt.

(4 Punkte)

Aufgabe 20) Seien M_1, M_2 topologische Räume. Eine Teilmenge $U \subset M = M_1 \times M_2$ heiße offen, wenn es für alle $(x_1, x_2) \in U$ offene Mengen $U_1 \subset M_1, U_2 \subset M_2$ gibt mit $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subset U$.

(a) Zeigen Sie, dass damit eine Topologie auf M definiert wird (die sog. Produkttopologie).

(b) Zeige: sind sowohl M_1 als auch M_2 separiert bzw. kompakt bzw. abzählbar im Unendlichen, so ist auch M separiert bzw. kompakt bzw. abzählbar im Unendlichen.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 21) Zeige: für jede n-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit M gibt es $N \in \mathbb{N}$ und eine injektive und stetige Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^N$, so dass für jede Kartenabbildung $\psi_i : M_i \simeq U_i \subset \mathbb{R}^n$ die Komposition $f \circ \psi_i^{-1} : U_i \to \mathbb{R}^N$ beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Tipp: Benutzen Sie eine Partition der Eins.

(4 Punkte)

Aufgabe 22) Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ beliebig oft stetig differenzierbar. Die Jacobimatrix von f habe in allen Punkten der Menge $M = f^{-1}(0) = \{x \in U | f(x) = 0\}$ den Rang m. M werde mit der vom $\mathbb{R}^{n+m}$ induzierten Topologie versehen.

(a) Zeigen Sie, dass U und M abzählbar im Unendlichen sind.

(b) Konstruieren Sie auf M eine Struktur als Mannigfaltigkeit ohne Rand $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ zusammen mit Kartenabbildungen $\psi_i : M_i \simeq U_i \subset \mathbb{R}^n$, so dass alle Kompositionen $\iota \circ \psi_i^{-1} : U_i \to \mathbb{R}^{n+m}$ beliebig oft stetig differenzierbar sind, wobei $\iota : M \subset R^{n+m}$ die kanonische Einbettung ist.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass unter den Voraussetzungen an f die Abbildung ϕ im Satz über die implizite Funktion (Ana II, 21.7.) beliebig oft stetig differenzierbar ist.

(6=2+4 Punkte)

Aufgabe 23) Sei $S^1 = \{(x, y, 0) | x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ sowie

$$G = \{(1, y, 0) | y \in \mathbb{R}\} \quad \text{und } P = (0, 0, 0).$$

Zeige, dass die Mannigfaltigkeiten $M_1 = \mathbb{R}^3 \backslash S^1$ und $M_2 = \mathbb{R}^3 \backslash (G \cup \{P\})$ diffeomorph sind.

(4 Punkte)