Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Blatt 5 Abgabe bis Donnerstag 23.11.2006 um 11:00 Uhr

Aufgabe 16) Für einen separierten topologischen Raum X sei $\overline{X} = X \cup \{\infty\}$ mit $\infty \notin X$. Wir definieren auf $\overline{X}$ eine Topologie, indem wir alle diejenigen Teilmengen $U \subset \overline{X}$ als offen erklären,

(i) die im Fall $\infty \notin U$ in X offen sind,

(ii) für die im Fall $\infty \in U$ das Komplement $X \backslash U$ kompakt ist.

(a) Zeige: $\overline{X}$ ist ein topologischer Raum.

(b) Sei X lokalkompakt. Zeige: $\overline{X}$ ist kompakt.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 17) Sei $n \in \mathbb{N}$ positiv. Wir bezeichnen das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle .,. \rangle$

Die Abbildung

$$\phi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \left(\frac{\langle x, x \rangle - 1}{\langle x, x \rangle + 1}, \frac{2x}{\langle x, x \rangle + 1} \right)$$

ist nach Ana 2, Aufgabe 42 differenzierbar. Sie ist eine bijektive Abbildung nach $M_1 = S^n \backslash \{N\}$, wobei $S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle y, y \rangle = 1\}$ die Einheitssphäre und $N = (1, 0, \ldots, 0)$ der Nordpol ist. Ebenso ist

$$\phi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \left(\frac{1 - \langle x, x \rangle}{\langle x, x \rangle + 1}, \frac{2x}{\langle x, x \rangle + 1} \right)$$

differenzierbar und induziert eine Bijektion $\phi_2 : \mathbb{R}^n \to M_2 = S^n \backslash \{S\}$ mit $S = (-1, 0, \ldots, 0)$.

(a) Zeige: S^n ist mit der vom $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Topologie, der Überdeckung $S^n = M_1 \cup M_2$ und den Kartenabbildungen $\psi_i = \phi_i^{-1} : M_i \to U_i = \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit.

(b) Berechne U_{12} und U_{21} sowie die Kartenwechselabbildung $\psi_{12} : U_{12} \to U_{21}$ und das Vorzeichen ihrer Jacobideterminante.

(c) Zeige: im Fall $n = 2$ wird durch das Paar von Differentialformen $\omega_1 \in A^2(U_1)$ und $\omega_2 \in A^2(U_2)$ mit

$$\omega_1 = -\omega_2 = \frac{dx_1 \wedge dx_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}$$

eine 2-Form auf der Mannigfaltigkeit S^2 definiert.

(6=2+2+2 Punkte)

Aufgabe 18) (a) Sei $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen und $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph (siehe Aufgabe 2). Zeige: $f + g, f \cdot g$ sind holomorph. Gilt $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, so ist auch f/g eine holomorphe Funktion.

(b) Zeige: jede gebrochen rationale Funktion $h(z) = f(z)/g(z)$ mit Polynomen f und $g \neq 0$ ist im Gebiet $U = \{z \in \mathbb{C} | g(z) \neq 0\}$ holomorph.

(c) Für ein normiertes Polynom $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ setzen wir $g(w) = 1 + a_{n-1}w + \ldots + a_0 \cdot w^n$ und bezeichnen mit

$$f'(z) = n \cdot z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \ldots + a_1$$

bzw. $g'(w) = a_{n-1} + \ldots + n \cdot a_0 \cdot w^{n-1}$ die formalen Ableitungen.

Sei $I : \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}^*, \quad w \mapsto z = w^{-1}$ sowie

$$\omega = \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot dz \in A^1(U) \quad \text{mit } U = \{z \in \mathbb{C} | f(z) \neq 0\}.$$

Dabei sei zur Abkürzung $dz = dx + idy$ gesetzt. Zeige:

$$I^*\omega \quad = \quad \frac{g'(w)}{g(w)} \cdot dw - n \cdot \frac{dw}{w} \qquad \in A^1(I^{-1}(U)).$$

(5=1+1+3 Punkte)