Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Blatt 4 Abgabe bis Donnerstag 16.11.2006 um 11:00 Uhr

Aufgabe 13) Seien $A, B \subset X$ Teilmengen eines metrischen Raumes. Wir definieren:

$$d(A,B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a,b).$$

Seien jetzt $A \subset X$ abgeschlossen und B kompakt.

(a) Zeigen Sie, dass genau dann $d(A,B) > 0$ gilt, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt.

(b) Sei jetzt $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f: X \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad x \mapsto \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

wohldefiniert und stetig ist, und dass $f(x) = 0$ genau dann gilt, wenn $x \in A$ ist, und $f(x) = 1$ genau dann gilt, wenn $x \in B$ ist.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 14) Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn er sich nicht als Vereinigung $X = A_1 \cup A_2$ offener Mengen $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ darstellen lässt.

(a) Zeigen Sie: ist X zusammenhängend und $f: X \to Y$ stetig und surjektiv, so ist auch Y zusammenhängend.

(b) Zeigen Sie: ist X wegzusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend. (*Tipp:* verwenden Sie Ana II, Aufgabe 16)a))

(c) Zeigen Sie, dass die Menge

$$X = \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\} \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0\}$$

mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie nicht wegzusammenhängend ist. (Sie ist nach Ana II, Aufgabe 16)c) aber zusammenhängend!)

(5=2+1+2 Punkte)

Aufgabe 15) Sei

$$\omega = \frac{u \cdot dv - v \cdot du}{1 + u^2 + v^2} \in A^1(\mathbb{R}^2).$$

(a) Berechnen Sie $\eta = d\omega$.

(b) Berechnen Sie $i^*\omega$ für $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, v \mapsto (0, v)$ sowie für $R > 0$ den Pullback $j_R^*\omega$ mit

$$j_R : \ [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \phi \mapsto (-R \sin \phi, R \cos \phi).$$

Berechnen Sie auch $I_1 = \int_{-R}^{R} i^*\omega$ und $I_2 = \int_0^\pi j_R^*\omega$.

(c) Berechnen Sie $I_F = \int_{K_R} \eta$ mit $K_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ sowie $I_F - I_1 - I_2$.

(d) Für festes $R > 0$ sei $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ eine Funktion mit $f(u, v) = 0$ für $u^2 + v^2 \geq (R+1)^2$ und $f(u, v) = 1$ für $u^2 + v^2 \leq R^2$. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes

$$\int_{K_{R+1} - K_R} d(f \cdot \omega).$$

(7 =1+2+2+2 Punkte)