Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Blatt 3 Abgabe bis Donnerstag 09.11.2006 um 11:00 Uhr

Aufgabe 9) (a) Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$ bezeiche A_{ij} die Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht. Zeigen Sie, dass A genau dann eine orthogonale Matrix ist, wenn

$$\det(A) \cdot a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt.

(b) Durch die Identifikation von 1 und 2-Formen im $\mathbb{R}^3$ mit Vektorfeldern wie in Aufgabe 3) erhält man einen Isomorphismus:

$$\begin{array}{cccc} I: & A^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\sim} & A^2(\mathbb{R}^3) \\ & f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 & \mapsto & f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2. \end{array}$$

Für $A \in GL(3, \mathbb{R})$ sei $l_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die zugehörige lineare Abbildung, die für $0 \leq i \leq 3$ die Pullbackabbildung $l_{A,i}^* : A^i(\mathbb{R}^3) \to A^i(\mathbb{R}^3)$ induziert.

Zeigen Sie: Es gilt genau dann $A \in O(3, \mathbb{R})$, wenn

$$I\left(l_{A,1}^* \omega\right) = \det(A)^{-1} \cdot l_{A,2}^*(I(\omega)) \qquad \text{für alle } \omega \in A^1(\mathbb{R}^3) \quad \text{ist.}$$

(5=1+4 Punkte)

Aufgabe 10) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch:

$$f(x, y) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}\,, \quad \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}\,, \quad \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Berechnen Sie $f^*\omega$ mit $\omega = z \cdot dx \wedge dy + x \cdot dy \wedge dz + y \cdot dz \wedge dx \in A^2(\mathbb{R}^3)$.

(3 Punkte)

Aufgabe 11) (a) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen sowie V sternförmig. Es gebe einen Diffeomorphismus $\phi : U \to V$, d.h. eine bijektive Abbildung, so dass sowohl ϕ als auch ϕ^{-1} beliebig oft stetig differenzierbar sind.

Zeigen Sie, dass auf U das Lemma von Poincaré gilt, d.h. dass es im Fall $r \geq 1$ für jedes $\omega \in A^r(U)$ mit $d\omega = 0$ ein $\eta \in A^{r-1}(U)$ gibt mit $\omega = d\eta$.

(b) Zeigen Sie, dass $V = (0,1) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2$ offen und sternförmig ist, dass

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (e^x \cdot \cos(y), e^x \cdot \sin(y))$$

einen Diffeomorphismus $V \to f(V)$ induziert, dass jedoch das Bild $f(V) \subset \mathbb{R}^2$ nicht sternförmig ist.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 12) (a) Zeigen Sie, dass $U_1 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\}$ und $U_2 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 0\}$ sternförmige und in $\mathbb{R}^2$ offene Teilmengen sind, dass jedoch $U = U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ nicht sternförmig ist.

(b) Sei $Z^1(U) = \{\omega \in A^1(U) | d\omega = 0\}$ der Unterraum der geschlossenen 1-Formen auf U. Ein $\omega \in Z^1(U)$ lässt sich nach dem Lemma von Poincaré auf U_1 in der Form $\omega = df_1$ mit $f_1 \in \mathcal{C}^\infty(U_1)$, auf U_2 in der Form $\omega = df_2$ mit $f_2 \in \mathcal{C}^\infty(U_2)$ schreiben. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$H : Z^1(U) \to \mathbb{R}, \qquad \omega \quad \mapsto \quad f_1(1,0) - f_1(-1,0) - f_2(1,0) + f_2(-1,0)$$

wohldefiniert und linear ist und dass $Kern(H) = \{df | f \in \mathcal{C}^\infty(U)\}$ gilt.

(c) Berechnen Sie $H(\omega)$ für $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$. (vgl. Ana II Aufgabe 48(b))

(5=1+2+2 Punkte)

Bemerkung: die Aufgabe 9(b) wurde durch Einfügen eines Exponenten -1 bei dem Faktor $\det(A)$ geändert. Sie ist aber auch in der ursprünglichen Formulierung richtig und lösbar (allerdings benötigt man eine zusätzliche Überlegung im Verhältnis zur geänderten Version).