Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Blatt 2 Abgabe bis Donnerstag 02.11.2006 um 11:00 Uhr

Aufgabe 5) Sei $\omega = x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz \in A^1(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie $l^*\omega = \omega$ für alle linearen Abbildungen $l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^3$ orthogonal sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 6) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{T} = \mathbb{R}^n$. Weiterhin sei $f : U \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Wir definieren induktiv $D^n f$ als Abbildung von U in den Vektorraum $T^n(\mathcal{T})$ der n-fachen Multilinearformen auf $\mathcal{T}$, indem wir $D^0 f = f$ setzen sowie

$$D^{n+1} f(x)(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}) = D(D^n f)(x)(v_{n+1})(v_1, \ldots, v_n) \quad \text{für } n \geq 0.$$

Man beachte, dass die Ableitung $D(D^n f)(x)$ von $D^n f$ im Punkt $x \in U$ eine lineare Abbildung von $\mathcal{T} = \mathbb{R}^n$ in den Vektorraum $T^n(\mathcal{T})$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $D^n f$ wohldefiniert ist, dass insbesondere $D^n f$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine differenzierbare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass $D^n f(x)$ eine symmetrische Multilinearform ist, d.h. dass

$$D^n f(x)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = D^n f(x)(v_1, \ldots, v_n) \qquad \text{für alle } \sigma \in S_n \text{ gilt.}$$

(c) Sei jetzt $0 \in U$. Für festes $v_0 \in \mathcal{T}$ setzen wir $I = \{t \in \mathbb{R} | tv_0 \in U\}$ sowie $g(t) = f(t \cdot v_0)$ für $t \in I$. Zeigen Sie, dass I offen in $\mathbb{R}$ ist und dass $g : I \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion ist mit $g^{(n)}(t) = D^n f(tv_0)(v_0, \ldots, v_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in I$.

(6=2+2+2 Punkte)

Aufgabe 7) (a) Wir betrachten auf $\mathbb{R}^{n+1}$ die Koordinaten $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Für $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $0 \leq r \leq n$ sei

$$A_0^r(U) := \left\{ \omega \;=\; \sum_{\#I=r,\, 0 \notin I} \omega_I \cdot dx_I \;\middle|\; \omega_I \in \mathcal{C}^\infty(U) \right\}$$

Zeigen Sie, dass sich jedes $\omega \in A^r(U)$ eindeutig in der Form

$$\omega = \omega_{r-1} \wedge dx_0 + \omega_r$$

darstellen lässt mit $\omega_{r-1} \in A_0^{r-1}(U)$ und $\omega_r \in A_0^r(U)$ (dabei sei $A_0^{-1} = \{0\}$).

(b) Im Fall $n = 3$ und $r = 2$ übersetze man die Gleichung $d\omega = 0$ in eine Differentialgleichung für die Vektorfelder f und g, die die Formen ω_1 und ω_2 wie in Aufgabe 3) beschreiben. Dabei benutze man die Notation $t = x_0$. Wie übersetzt sich eine inhomogene Gleichung der Form $d\omega = \eta$, wenn man $\eta = \eta_2 \wedge dx_0 + \eta_3 \in A^3(U)$ mittels des zu η_2 gehörigen Vektorfeldes $j = (j_1, j_2, j_3)$ und der zu η_3 gehörigen Funktion ρ beschreibt?

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 8) Auf $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ betrachten wir die Differentialformen

$$\omega_1 = \frac{u \cdot dv + v \cdot du}{u^2 + v^2} \in A^1(U) \qquad \text{und} \qquad \omega_2 = \frac{u \cdot dv - v \cdot du}{u^2 + v^2} \in A^1(U).$$

Weiterhin sei $f : \mathbb{R}^2 \to U$ definiert durch

$$f(x, y) = (e^x \cdot \cos(y), e^x \cdot \sin(y)).$$

Berechnen Sie die Formen $f^*\omega_1$ und $f^*\omega_2$.

(3 Punkte)