Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Blatt 1 Abgabe bis Donnerstag 26.10.2006 um 11:00 Uhr

Aufgabe 1) Für $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ betrachten wir die Differentialform

$$\omega = g(x,y) \cdot x \cdot dx + g(x,y) \cdot y \cdot dy \;\in\; A^1(\mathbb{R}^2).$$

(a) Berechnen Sie die Form $d\omega$.

(b) Für festes $r > 0$ betrachten wir die Abbildung

$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \phi \mapsto (r\cos(\phi), r\sin(\phi)).$$

Berechnen Sie $k^*\omega$.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 2) Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, indem wir $x+iy \in \mathbb{C}$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ identifizieren.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f = f_1 + if_2 : U \to \mathbb{C}$ mit reell differenzierbaren Funktionen f_1, f_2. Die komplexwertige Funktion f heißt holomorph, wenn die Differentialform $\omega = f \cdot (dx + i \cdot dy)$ geschlossen ist.

(a) Durch welche partiellen Differentialgleichungen sind der Realteil f_1 und der Imaginärteil f_2 bei einer holomorphen Funktion f miteinander verknüpft?

(b) Zeigen Sie: Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $g : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $dg = f \cdot (dx + idy)$, so ist g eine holomorphe Funktion.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 3) Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ und $i = 0, 1, 2, 3$ schreiben wir $\omega_i \in A^i(U)$ in der Form

$$\omega_0 = F, \qquad \omega_1 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3,$$

$$\omega_2 = g_1 dx_2 \wedge dx_3 + g_2 dx_3 \wedge dx_1 + g_3 dx_1 \wedge dx_2$$

$$\omega_3 = h \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

mit geeigneten Funktionen $F, f_1, f_2, \ldots, g_3, h \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

(a) Welche Differentialgleichungen bestehen für $i = 0, 1, 2$ jeweils zwischen den Funktionen $F, f_1, f_2, \ldots, g_3, h$, wenn $d\omega_i = \omega_{i+1}$ gilt?

(b) (Nicht nur für Physiker:) Wie schreibt man die Gleichungen $d\omega_i = \omega_{i+1}$ als Relation zwischen den Funktionen F bzw. h und den Vektorfeldern $f = (f_1, f_2, f_3)$ und $g = (g_1, g_2, g_3)$ mit Hilfe von $grad, rot$ und div? In welche Aussagen über $grad, rot$ und div übersetzen sich die Relationen $dd\omega = 0$ und das Lemma von Poincaré?

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 4) Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die 2-Form

$$\omega \quad = \quad z \cdot dx \wedge dy + x \cdot dy \wedge dz + y \cdot dz \wedge dx.$$

(a) Berechnen Sie $d\omega$.

(b) Berechnen Sie $k^*\omega$ für $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$k(\phi, \psi) = (\cos(\phi) \cdot \cos(\psi), \cos(\phi) \cdot \sin(\psi), \sin(\phi)).$$

(3=1+2 Punkte)