Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis I WS 2005/2006

Blatt 4 Abgabe bis zum 18.11.2005 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie 3 der folgenden Aufgaben:

Aufgabe 13) Beweisen oder widerlegen Sie, dass für beliebige Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen die folgenden Implikationen zwischen den untenstehenden Aussagen gelten:

$$(a) \Rightarrow (b), \qquad (b) \Rightarrow (c), \qquad (c) \Rightarrow (a)$$

(a) Die Folge (a_n) ist eine Cauchyfolge;

(b) Die Folge (b_n) mit $b_n = a_{n+1} - a_n$ ist eine Nullfolge;

(c) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(b_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n^k = a_{n+k} - a_n$ eine Nullfolge.

(4 Punkte)

Aufgabe 14) Sei $x > 0$ ein Element eines archimedisch angeordneten vollständigen Körpers K. Für $n \in \mathbb{N}$ sei a_n die kleinste natürliche Zahl mit $a_n^2 \geq x \cdot 7^{2n}$. Warum existiert diese? Weiterhin sei

$$b_n = a_n \cdot 7^{-n} \quad \text{und} \quad c_n = (a_n - 1) \cdot 7^{-n}.$$

Zeigen Sie:

(a) b_n ist eine monoton fallende, c_n eine monoton steigende Folge rationaler Zahlen; beide Folgen sind beschränkt; beide Folgen sind konvergent.

(b) Ist $y = \lim_{n\to\infty} b_n \in K$, so gilt auch $y = \lim_{n\to\infty} c_n$ und $y^2 = x$.

(c) Folgern Sie daraus, dass der archimedisch angeordnete Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen nicht vollständig ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 15) Für eine endliche Menge M gebe es eine injektive, aber nicht surjektive Abbildung von der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ in das kartesische Produkt $M \times M$. Wie viele Elemente hat M? Begründen Sie das Ergebnis.

Tipp: Benutzen Sie die Definitionen sowie Theorem 2.1 aus der Vorlesung LA I von Prof. Kreck, um die Voraussetzung in eine Ungleichung zu übersetzen.

(4 Punkte)

Aufgabe 16) Sei K ein beliebiger angeordneter Körper.

(a) Zeigen Sie: Für eine Cauchyfolge (a_n) und eine Nullfolge (b_n) ist $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

(b) Auf der Menge R aller Cauchyfolgen sind durch die gliedweise Addition und Multiplikation zwei Verknüpfungen definiert, für die alle Körperaxiome bis auf das Axiom (K3') gelten. Für die Teilmenge I der Nullfolgen gilt:

- (I1) $0 \in I$ und aus $a, b \in I$ folgt $a + b \in I$ sowie $-a \in I$ (Vorlesung);
- (I2) Aus $a \in R$ und $b \in I$ folgt $ab \in I$ (Teilaufgabe (a));
- (I3) Für jedes $a \in R, a \notin I$ gibt es $b \in R$ mit $ab - 1 \in I$ (Aufgabe 11).

Wir definieren eine Relation $\sim$ durch $a \sim b \;:\Leftrightarrow\; a - b \in I$.

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Sei $F = R/\sim$ die Quotientenmenge. Die Äquivalenzklasse eines $a \in R$ werde mit $[a]$ bezeichnet. Wir definieren auf F zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch $[a] + [b] := [a + b]$ und $[a] \cdot [b] := [ab]$ für $a, b \in R$.

Zeigen Sie, dass $\cdot$ wohldefiniert ist: aus $a \sim a'$ und $b \sim b'$ folgt $ab \sim a'b'$.

(d) Zeigen Sie, dass in F das Körperaxiom (K3') gilt.

Bemerkung: Auch die Verknüpfung $+$ ist wohldefiniert (vgl. Aufgabe 11 zur LA I), und die übrigen Körperaxiome gelten ebenfalls, weil sie bereits in R gelten. Somit ist F tatsächlich ein Körper. Startet man mit $K = \mathbb{Q}$, so ist der hier konstruierte Körper F eine von mehreren möglichen Beschreibungen des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

(6 Punkte)