Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis II SS 2006

Blatt 13 Wiederholungsaufgaben

Aufgabe 49) Beweisen Sie, dass für $a, b \in (-\sqrt{2}+1, 1)$ folgende Identität gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a+b-ab)^k}{k} \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k+b^k}{k}.$$

Aufgabe 50) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x^2 - y$ auf der Menge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2x^2 + y^2 = 3\}.$$

Aufgabe 51) Formulieren Sie den Satz von der impliziten Funktion.

Aufgabe 52) Formulieren Sie den Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz.

Aufgabe 53) Formulieren Sie den Satz über die Taylorformel mit Restglied im $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 54) Formulieren Sie das ϵ-Kriterium für Lebesgue-Integrierbarkeit.

Aufgabe 55) Formulieren Sie ein hinreichendes Kriterium für die Gültigkeit der Vertauschungsregel

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy.$$

(56) Ist $|f|$ Lebesgue-integrierbar für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so ist f Lebesgue-integrierbar.

JA ☐ ☐ NEIN

(57) Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen, so ist

für jede offene Teilmenge $V \subset Y$ die Menge $f^{-1}(V)$ in X offen,

JA ☐ ☐ NEIN

für jede kompakte Teilmenge $V \subset Y$ die Menge $f^{-1}(V)$ kompakt.

JA ☐ ☐ NEIN

(58) Jede total differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist partiell differenzierbar.

JA ☐ ☐ NEIN

(59) Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes X ist genau dann kompakt, wenn jede offene Überdeckung von M nur endlich viele Elemente hat.

JA ☐ ☐ NEIN

(60) Für $X = [0, 1]$ ist die Integration

$$I : (C(X), \|.\|) \to (C_1(X), \|.\|_1), \quad f \mapsto \{If : x \mapsto \int_a^x f(t)dt\}$$

eine stetige lineare Abbildung.

JA ☐ ☐ NEIN