Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis II SS 2006

Blatt 12 Abgabe bis zum 21.07.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie drei der vier Aufgaben!

Aufgabe 45) Seien $0 < r < R$ reelle Zahlen und T der Volltorus:

$$T \quad = \quad \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Bild der Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \qquad [0,r] \times [0,2\pi) \times [0,2\pi) \qquad &\to \qquad \mathbb{R}^3, \\ (a,\alpha,\beta) \quad \mapsto \quad ((R + a\sin\beta)\cdot\sin\alpha, &(R + a\sin\beta)\cdot\cos\alpha, a\cdot\cos\beta) \end{aligned}$$

gleich T ist, und berechnen Sie von ϕ Jacobimatrix und deren Determinante.

(b) Berechnen Sie das (euklidische) Volumen $v = Vol(T)$ von T.

(5=3+2 Punkte)

Aufgabe 46) (a) Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x^2+y^2)$ Lebesgue-integrierbar ist und dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(x,y)\, dxdy \quad = \quad \pi \cdot \int_0^\infty f(z)dz \qquad \text{gilt.}$$

(b) Was ergibt sich im Spezialfall $f(r) = \exp(-r)$? Führen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini einen neuen Beweis für die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad = \quad \sqrt{\pi}.$$

(5=3+2 Punkte)

Aufgabe 47) Sei $X = GL(n;\mathbb{R}) \subset M(n,n;\mathbb{R})$, wobei $M(n,n;\mathbb{R})$ wie in Aufgabe 11) mit dem $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert wird. Gemäß 24.1. betrachten wir auf X das durch Fortsetzung des Riemann-Integrals entstandene Integral $I:\ C_c(X) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_X f(x)dx$.

Durch $I_h : f \mapsto \int_X f(x) \cdot |det(x)|^{-n} dx$ wird auf X nach Aufgabe 43) ein weiteres Daniell-Integral definiert. Zeigen Sie, dass I_h gegenüber Rechts- und Linkstranslationen um Elemente $g \in GL(n;\mathbb{R})$ invariant ist:

$$I_h(L_g(f)) = I_h(f) = I_h(R_g(f)),$$

wobei $L_g(f) : x \mapsto f(g \cdot x)$ und $R_g(f) : x \mapsto f(x \cdot g)$ sei.

(4 Punkte)

Aufgabe 48) Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen mit

$$(*) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

(a) Zeigen Sie im Fall $X = \mathbb{R}^2$, dass es eine stetig differenzierbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$(**) \qquad \frac{\partial g}{\partial x_1} = f_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = f_2 \qquad .$$

(b) Im Fall $X = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ und $f_1(x_1,x_2) = \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}$ sowie $f_2(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}$ zeige man, dass zwar (*) erfüllt ist, dass aber keine Funktion g existiert, die die Ableitungsregeln (**) auf ganz X erfüllt.

Tipp (bitte selbständig ausarbeiten!): Man kann z.B. setzen

$$g_1(x_1,x_2) = \int_{-1}^{x_2} f_2(-1,t)dt + \int_{-1}^{x_1} f_1(t,x_2)dt$$

$$g_2(x_1,x_2) = \int_{-1}^{x_1} f_1(t,-1)dt + \int_{-1}^{x_2} f_2(x_1,t)dt$$

und dann zeigen, dass g_1 die erste, g_2 die zweite Ableitungsregel (**) erfüllt, wobei im Fall (a) gilt: $g_1 = g_2$, während im Fall (b) die Funktion $g_1 - g_2$ im Bereich $(0,\infty) \times (0,\infty)$ nicht die Nullfunktion ist.

(6=3+3 Punkte)