Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis I WS 2005/2006

Blatt 3 Abgabe bis zum 11.11.2005 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie maximal 3 Aufgaben:

Aufgabe 9) Sind nachstehende Folgen Nullfolgen bzw. Cauchyfolgen bzw. konvergente Folgen im Körper der rationalen Zahlen?

$$a_n = \frac{10000n}{n^2 + 10000} \qquad b_n = \frac{n^2}{10000n + 1}$$

$$c_n = \frac{n^2 - 10n - 1000}{n^2 + 10n + 1000}.$$

Begründen Sie das Ergebnis.

(4 Punkte)

Aufgabe 10) In den Bezeichnungen von Aufgabe 4) betrachten wir die Abbildung:

$$\phi : K \to K, (a, b) \mapsto (a, -b)$$

sowie die Normabbildung $N : K \to F, (a, b) \mapsto a^2 - b^2 \cdot d$.

Zeigen Sie für $z, z_1, z_2 \in K$:

(a) $\phi(z_1 + z_2) = \phi(z_1) + \phi(z_2)$ und $\phi(z_1 \cdot z_2) = \phi(z_1) \cdot \phi(z_2)$;

(b) $z \cdot \phi(z) = (N(z), 0)$ und $N(\phi(z)) = N(z)$;

(c) $N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1) \cdot N(z_2)$;

Im Fall $F = \mathbb{R}, d = -1$ ist $K = \mathbb{C}$ und man nennt $\phi(z) = \bar{z} = x - iy$ das komplex konjugierte von $z = x + iy$. (b) schreibt sich dann: $z \cdot \bar{z} = N(z)$. Für $K = \mathbb{C}$ zeige man:

(d) $N(z) \geq 0$, wobei $N(z) = 0$ nur für $z = 0$ gilt. (5 Punkte)

Aufgabe 11) In einem angeordneten Körper K sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, aber keine Nullfolge. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $b_n = \frac{1}{a_n}$ falls $a_n \neq 0$ und $b_n = 1$ für $a_n = 0$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt $N_0 \in \mathbb{N}$ und $k \in K, k > 0$ mit $|a_n| \geq k$ für alle $n \geq N_0$.

(b) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.

(c) Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen 1.

(4 Punkte)

Aufgabe 12) Für $x \in \mathbb{Q}$ mit $x \geq 0$ sei $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$. Weiterhin sei die Folge a_n rekursiv definiert durch:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Zeigen Sie:

(a) $3/2 \leq f(x) \leq 2$ für alle $x \geq 0$;

(b) $f(x)^2 - 3 = \dfrac{x^2-3}{(x+2)^2}$

(c) $|a_n^2 - 3| \leq \left(\frac{4}{49}\right)^{n-1}$

(d) $|a_{n+1} - a_n| \leq \left(\frac{2}{7}\right)^{2n-1}$

(e) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.

(f) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$.

(6 Punkte)