Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis II SS 2006

Blatt 9 Abgabe bis zum 30.06.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie drei der vier Aufgaben!

Aufgabe 33) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$. Zeigen Sie:

(a)
$$a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot a_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Tipp: Zeigen Sie mittels partieller Integration: $a_{n+2} = a_n - \frac{a_{n+2}}{n+1}$.

(b) $a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_1 = 1$ und
$$(n+1) \cdot a_{n+1} \cdot a_n = \frac{\pi}{2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(c) $a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

(d)
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1} \qquad \text{(Wallissches Produkt)}.$$

(6=2+1+1+2 Punkte)

Aufgabe 34) Wir benutzen die Notationen aus Aufgabe 33). Zeigen Sie:

(a) Die Funktionenfolge
$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(\max\left\{0;\ 1 - \frac{x^2}{n}\right\}\right)^n$$
ist eine monoton steigende Folge, die punktweise gegen die Funktion $f(x) = \exp(-x^2)$ konvergiert.

(b)
$$\int_0^\infty f_n(x)dx = \sqrt{n} \cdot \int_0^1 (1-y^2)^n dy = \sqrt{n} \cdot a_{2n+1}.$$

(c) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\cdot\frac{n}{2n+1}} \quad = \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(6=2+2+2 Punkte)

Aufgabe 35) Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie, dass für eine nichtleere Teilmenge $A\subset X$ die Abbildung

$$d(.,A): \quad X\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto d(x,A)=\inf_{a\in A} d(x,a) \qquad \text{stetig ist.}$$

(b) Zeigen Sie, dass für $n\in\mathbb{N}$ durch $f_n(x)=\max\{0,\ 1-n\cdot d(x,A)\}$ eine monoton fallende Folge von stetigen Funktionen auf X definiert wird, die gegen die charakteristische Funktion $\chi_{\overline{A}}$ des Abschlusses $\overline{A}$ von A in X konvergiert. Dabei ist

$$\overline{A}=\{a\in X|\ \text{Es gibt eine Folge } (a_n) \text{ mit } a_n\in A \text{ und } \lim_{n\to\infty} a_n=a\}.$$

(c) Falls $B(X)=C(X)$ aus den stetigen Funktionen auf X besteht, zeige man, dass die charakteristische Funktion χ_Y einer Menge $Y\subset X$ genau dann zu $B^-(X)$ gehört, wenn Y in X abgeschlossen ist.

(6=2+2+2 Punkte)

Aufgabe 36) Betrachte die natürlichen Zahlen $X=\mathbb{N}$ als metrischen Raum mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik $d(n,m)=|n-m|$.

(a) Was ist $C_c(X)$? Zeigen Sie: die Linearform $I: f\mapsto\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ ist ein Daniel-Integral.

(b) Zeigen Sie: eine Funktion $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ist genau dann bezüglich der Linearform I Daniel-Lebesgue-integrierbar, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

absolut konvergiert. In diesem Fall konvergiert die Reihe gegen $I(f)$.

(6=2+4 Punkte)