Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis II SS 2006

Blatt 8 Abgabe bis zum 23.06.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie drei der vier Aufgaben!

Aufgabe 29) Zeigen Sie, dass die Folge der Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max\{0, 1 - \frac{1}{n} \cdot |x|\}$$

eine monoton steigende Folge von stetigen Funktionen ist, die gegen die stetige konstante Funktion 1 konvergiert. Ist die Konvergenz gleichmäßig?

(4 Punkte)

Aufgabe 30) (Fundamentalsatz der Algebra) Sei

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \quad \text{mit } a_n \neq 0$$

eine komplexe Polynomfunktion $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vom Grad $n \geq 1$.

(a) Zeigen Sie, dass es $R > 0$ gibt mit $|P(z)| \geq |P(0)| + 1$ für alle $z \in \mathbb{C} \backslash K_R(0)$. *Hinweis:* Argumentieren Sie ähnlich wie bei Aufgabe 35 (Ana I).

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $|P| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |P(z)|$ ihr Infimum in mindestens einem Punkt z_0 als Wert annimmt. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass das auf einer geeigneten kompakten Teimenge von $\mathbb{C}$ angenommene Minimum global ist.

(c) Zeigen Sie, dass mit einem z_0 aus Teil (b) gilt: $P(z_0) = 0$. (*Hinweis:* Man reduziere durch eine Koordinatentransformation auf den Fall $z_0 = 0$. Würde $P(z_0) \neq 0$ gelten, so wäre $a_0 \neq 0$. Sei $k \geq 1$ die kleinste Zahl ≥ 1 mit $a_k \neq 0$. Zeigen Sie (z.B. mit Hilfe der Aufgabe 2c), dass es $\zeta \in \mathbb{C}$ gibt mit $\zeta^k \cdot a_k + a_0 = 0$, und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion

$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, r \mapsto |P(\zeta \cdot r)|$ für kleine $r > 0$, um die Annahme $P(z_0) \neq 0$ auf einen Widerspruch zu führen.)

(6=1+1+4 Punkte)

Aufgabe 31) Eine auf einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion f heißt Treppenfunkion, wenn es $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ gibt, so dass f auf jedem offenen Teilintervall (x_i, x_{i+1}) konstant ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge der Treppenfunktionen einen Verband $B_T(I)$ bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die stetigen Funktionen auf I in $B_T^-(I)$ und in $B_T^+(I)$ liegen.

(c) Sei $f : I \to [0, \infty)$ eine Funktion, so dass für jedes $k > 0$ die Menge $\{x \in I | f(x) > k\}$ endlich ist. Zeigen Sie, dass $f \in B_T^-(I)$ gilt.

(6=2+2+2 Punkte)

Aufgabe 32) Sei Y der Vektorraum aller beschränkten Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, versehen mit der Supremumsnorm $\|(a_n)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.

(a) Zeigen Sie, dass Y vollständig ist. (*Ergo:* Y ist Banachraum)

(b) Sei I die Teilmenge aller Folgen $A = (a_n)$, so dass $a_n \in \{\pm 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $A \in I$ sei U_A die offene Kugel um A vom Radius 2. Zeigen Sie, dass $(U_A \cap B)_{A\in I}$ eine Überdeckung der abgeschlossenen Kugel B vom Radius 1 um die Nullfolge $0 = (0)$ ist, und dass für keine echte Teilmenge $I' \subset I$ das System $(U_A \cap B)_{A\in I'}$ eine Überdeckung bildet.

(c) Zeigen Sie, dass Y nicht lokalkompakt ist.

(d*) Zeigen Sie, dass Y keine abzählbare Basis besitzt.

(8=1+3+1+3 Punkte)