Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis II SS 2006

Blatt 7 Abgabe bis zum 16.06.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie drei der vier Aufgaben!

Aufgabe 25) (a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: für jedes $r > 0$ gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ und $y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^n y_i^2 = r^2$, so dass gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) = \lambda \cdot y_i \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

(b) Folgern Sie aus (a), dass jede reelle symmetrische Matrix $A = (a_{ij})$ mindestens einen reellen Eigenwert hat.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 23) für Teil (a) und die Funktion $f(x) = {}^t x A x$ in Teil (b).

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 26) Welche der folgenden Teilmengen des Vektorraums der reellen bzw. komplexen Matrizen (versehen mit der in Aufgabe 11 behandelten Metrik) sind kompakt, wenn $n \geq 2$ eine natürliche Zahl ist?

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M(n,n,\mathbb{R}) \mid A \cdot {}^t A = E\}$$

$$O_n(\mathbb{C}) = \{A \in M(n,n,\mathbb{C}) \mid A \cdot {}^t A = E\}$$

$$U_n(\mathbb{R}) = \{A \in M(n,n,\mathbb{C}) \mid A \cdot {}^t \bar{A} = E\}$$

$$O_{3,1}(\mathbb{R}) = \{A \in M(4,4,\mathbb{R}) \mid A \cdot B \cdot {}^t A = B\}$$

$$\text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Aufgabe 27) Sei $f : X \to Y$ eine stetige surjektive Abbildung zwischen metrischen Räumen. Zeigen Sie:

(a) Ist X kompakt, so auch Y.

(b) Ist X kompakt und f bijektiv, so ist die Umkehrabbildung f^{-1} ebenfalls stetig.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 28) (a) Für metrische Räume (X, d_X) und (K, d_K) versehen wir $X \times K$ mit der Metrik

$$d((x_1, k_1), (x_2, k_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_K(k_1, k_2)).$$

Sei $f : X \times K \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und K kompakt. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sup_{k \in K} f(x, k) \qquad \text{stetig ist.}$$

(b) An welchen Stellen ist im Fall

$$X = K = \mathbb{R}, \quad f(x, k) = \sin(x \cdot k)$$

die wie in Teil (a) definierte Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sup_{k \in K} f(x, k)$ stetig?

(4=3+1 Punkte)