Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis II SS 2006

Blatt 6 Abgabe bis zum 09.06.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie drei der vier Aufgaben!

Aufgabe 21) Für die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 1$$

bestimme man die lokalen Extrema und die Sattelpunkte. Welche lokalen Extremwerte sind auch globale Extremwerte?

Hinweis: Ein Sattelpunkt ist ein kritischer Punkt (d.h. es gilt $df(P) = 0$), in dem die Hessematrix $H(f)(P)$ indefinit ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 22) Für $m \leq n$ sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung, so dass im Punkte ξ die Jacobimatrix $Df(\xi)$ den Rang m hat. Sei $M = \{x \in U | f(x) = 0\}$ und $\xi \in M$.

Für $v \in \mathbb{R}^n$ zeige man: Es gibt genau dann ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\phi : I \to M \subset \mathbb{R}^n$ mit $\phi(0) = \xi$ und $\phi'(0) = v$, wenn $v \in \ker(Df(\xi))$ gilt.

Hinweis: Benutzen Sie u.a. den Satz über implizite Funktionen.

(4 Punkte)

Aufgabe 23) Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in M = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$ mit $dg(a) \neq 0$. Die Einschränkung von f auf die Menge M habe im Punkt a ein lokales Extremum. Zeigen Sie, dass $df(a)$ ein Vielfaches von $dg(a)$ ist.

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 22) benutzen.

(4 Punkte)

Aufgabe 24) Bestimmen Sie die lokalen und die globalen Extremwerte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) = -3x + y + 2z$$

auf der Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 23) benutzen.

(4 Punkte)