Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis II SS 2006

Blatt 5 Abgabe bis zum 02.06.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie drei der vier Aufgaben!

Aufgabe 17) Bestimmen Sie mit Beweis die Mengen $O_{i,x}$ (bzw. $O_{i,y}$) aller Punkte P der folgenden Mengen $X_i \subset \mathbb{R}^2$, für die es offene Mengen $U(P) \subset \mathbb{R}^2$ gibt, so dass sich $U(P) \cap X_i$ in der Form

$$U(P) \cap X_i = \{(x, \phi(x)) | x \in I\}$$

$$\text{(bzw. in der Form} \quad U(P) \cap X_i = \{(\psi(y), y)) | y \in I\})$$

mit einer differenzierbaren Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$ (bzw. $\psi : I \to \mathbb{R}$) für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ schreiben lässt:

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 - x\}$$

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2 - x^4\}$$

Gibt es Punkte in X_i, die weder in $O_{i,x}$ noch in $O_{i,y}$ liegen? (Solche Punkte heißen Singularitäten.) Skizzieren Sie die Mengen X_1 und X_2.

(4 Punkte)

Aufgabe 18) Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x^3 - 3xy^2$$

bis zum Term zweiten Grades um den Entwicklungspunkt $\xi = (1, 1)$ und geben Sie die Formeln für das Restglied an, mit dem Sie die Werte $f(0, 0)$ und $f(2, 1)$ berechnen können.

(4 Punkte)

Aufgabe 19) a) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = \frac{\cos(t)}{y(t)},$$

für die $y(0) = 2$ gilt.

b) Die in einer Umgebung von 0 differenzierbare Funktion z erfülle die Differentialgleichung:

$$z'(t) = \frac{-v \cdot z(t)}{k + z(t)} \quad \text{mit Konstanten } v, k > 0$$

Es gelte $z(0) = 1$. Berechnen Sie die Umkehrfunktion $\phi = z^{-1}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}$, die 1 enthält.

(4= 2+2 Punkte)

Aufgabe 20) a) Die orthogonalen Matrizen

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M(n, n; \mathbb{R}) \mid A \cdot {}^tA = E\}$$

und die schiefsymmetrischen Matrizen

$$Sk_n(\mathbb{R}) = \{A \in M(n, n; \mathbb{R}) \mid A + {}^tA = 0\}$$

werden mit der Einschränkung der in Aufgabe 11) für $M(n, n; \mathbb{R})$ betrachteten Metrik versehen. Zeigen Sie, dass es offene Teilmengen $U \subset O_n(\mathbb{R})$ mit $E \in U$ sowie $V \subset Sk_n(\mathbb{R})$ mit $0 \in V$ und eine differenzierbare bijektive Abbildung $\phi : V \to U$ gibt mit

$$\phi(A) - {}^t\phi(A) = 2 \cdot A$$

für alle $A \in V$.

b) Wie sieht diese Abbildung im Fall $n = 2$ aus?

(5=4+1 Punkte)