Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis II SS 2006

Blatt 4 Abgabe bis zum 26.05.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie drei der vier Aufgaben!

Aufgabe 13) Die Folge der Funktionen $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f_n(x) \quad = \quad n^2 \cdot x \cdot e^{-nx}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \geq 0$ gilt.

b) Berechnen Sie $a_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ und $\lim_{n\to\infty} a_n$.

c) Berechnen Sie das Maximum der Funktion f_n im Intervall $[0, \infty)$. Konvergiert f_n im Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion?

(5=1+2+2 Punkte)

Aufgabe 14) Berechnen Sie die Jacobimatrix der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$$

sowie ihre Determinante und geben Sie alle Punkte P an, so dass f eine geeignete Umgebung von P bijektiv auf eine Umgebung von $f(P)$ abbildet.

(4 Punkte)

Aufgabe 15) a) Für die Abbildung $f : Y \to X$ zwischen metrischen Räumen sei das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder offenen Menge $A \subset X$ offen in Y. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Indexmenge I die Vereinigung $A = \cup_{i\in I} A_i$ offener Mengen A_i in einem metrischen Raum X wieder offen ist.

c) Die Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d_X) wird mit der Einschränkung der Metrik d_X selber ein metrischer Raum (Y, d_Y). Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $A \subset Y$ genau dann offen in Y ist, wenn es eine offene Menge B im metrischen Raum X gibt, so dass $A = B \cap Y$ gilt.

(6=2+1+3 Punkte)

Aufgabe 16) Ein metrischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn er sich nicht als Vereinigung $X = A_1 \cup A_2$ offener Mengen $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ darstellen lässt.

Zeigen Sie, dass die folgenden Räume zusammenhängend sind:

a) das abgeschlossenes Intervall $I = [0, 1]$;

b) ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum V;

c) die Menge $X = \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\} \ \cup \ \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0\}$ mit der von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik. (siehe Aufgabe 15b).

(6=2+1+3 Punkte)