Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis II SS 2006

Blatt 3   Abgabe bis zum 19.05.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie drei der Aufgaben 9) bis 12) und ggf. 8*) als Zusatzaufgabe!

Aufgabe 8*) (Korrektur von Teil a) auf Blatt 2) Mit den in Kapitel 17 definierten Bernoullipolynomen $B_n(t)$ bilden wir für $t, z \in \mathbb{R}$ die Reihe:

$$f_t(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \cdot \frac{z^n}{n!}.$$

Zeigen Sie, dass es $a > 0$ gibt, so dass für jedes $b > 0$ die Reihe gleichmäßig in $z \in [-a, a]$ und $t \in [-b, b]$ konvergiert.

Aufgabe 9) Die Abbildung $k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch:

$$k(r, \phi, \psi) = (r \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\psi), r \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\psi), r \cdot \sin(\phi)).$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von k.

(4 Punkte)

Aufgabe 10) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen jeweils offen sind:

a) eine "offene Kugel" $K_\epsilon(\xi) = \{x \in X \mid d(x, \xi) < \epsilon\}$ in einem metrischen Raum X;

b) der Durchschnitt zweier offener Mengen A und B in einem metrischen Raum X;

c) das Urbild $f^{-1}(A)$ einer offenen Menge $A \subset X$ unter einer stetigen Abbildung $f : Y \to X$ zwischen metrischen Räumen.

(6=2+2+2 Punkte)

Aufgabe 11) Der Vektorraum $V = M(n, n; \mathbb{R})$ der reellen $n \times n$ Matrizen werde mit dem R^{n^2} identifiziert und mit der euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^{n^2}$ versehen.

a) Berechnen Sie die Ableitung der Abbildung $Q : V \to V, X \mapsto X \cdot X$ in einem Punkt $B \in V$.

b) Zeigen Sie, dass die Menge $GL(n; \mathbb{R})$ in V offen ist.

c) Zeigen Sie, dass die Determinante $\det : V \to \mathbb{R}$ überall differenzierbar ist und berechnen Sie ihre Ableitung im Punkt $E_n \in V$ (Einheitsmatrix).

d) Zeigen Sie das das Invertieren:

$$I : GL(n; \mathbb{R}) \to GL(n; \mathbb{R}), \qquad X \mapsto X^{-1}$$

eine differenzierbare Abbildung ist und berechnen Sie ihre Ableitung in einem Punkt $B \in GL(n, \mathbb{R})$.

(7=2+1+2+2 Punkte)

Aufgabe 12) Für ein homogenes Polynom $P(x, y) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i y^{d-i}$ vom Grad d, ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $r \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion $f = f_{P,n,r}$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{P(x, y)}{(x^2 + y^2)^n} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \qquad f(0, 0) = r.$$

a) Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn entweder $r = 0$ und $d > 2n$ oder aber $d = 2n$ und $P(x, y) = r \cdot (x^2 + y^2)^n$ gilt.

b) Bestimmen Sie im Fall $d > 2n$ die beiden partiellen Ableitungen von f und schreiben Sie diese in der Form $f_{\tilde{P},\tilde{n},\tilde{r}}$. Wie oft ist f stetig partiell differenzierbar?

c) Für $P(x, y) = xy,\ n = 1; r = 0$ zeige man, dass das zugehörige f partiell differenzierbar ist.

(5=2+2+1 Punkt)