Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis II SS 2006

Blatt 2 Abgabe bis zum 12.05.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie drei der vier Aufgaben!

Aufgabe 5) Zeigen Sie: für $y \in (0, \infty)$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \cdot \left(\frac{y-1}{y+1} \right)^{2k+1}$$

gegen $\log(y)$. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Intervall $I \subset (0, \infty)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 6) Zeigen Sie:

a) Für normierte Vektorräume V_1, V_2 ist

$$L(V_1, V_2) = \{ l : V_1 \to V_2 \mid l \text{ ist linear und stetig } \}$$

zusammen mit der Norm $\|.\| : l \mapsto \|l\|$ ein normierter Vektorraum.

b) Ist V_2 ein Banachraum, so ist auch $L(V_1, V_2)$ ein Banachraum.

c) Ist V ein Banachraum und $A \in L(V, V)$, so konvergiert die Reihe

$$\exp(A) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

wobei $A^k = A \circ A \circ \ldots \circ A$ die k-fache Komposition von A mit sich ist.

(6=2+2+2 Punkte)

Aufgabe 7) Für eine Folge a_i reeller Zahlen definieren wir:

$$M_1 = \{r \mid r \geq 0 \text{ und } \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot r^i \text{ konvergiert } \}$$

$$M_2 = \{r \mid r \geq 0 \text{ und } \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot r^i \text{ konvergiert } \}$$

$$M_3 = \{|r| \quad | \; r \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot r^i \text{ konvergiert } \}$$

$$M_4 = \{|r| \quad | \; r \in \mathbb{R} \text{ und } a_i \cdot r^i \text{ ist Nullfolge } \}$$

$$M_5 = \{r \mid r \geq 0 \text{ und } |a_i| \cdot r^i \text{ ist beschränkte Folge } \}$$

a) Zeigen Sie: $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset M_4 \subset M_5$.

b) Zeigen Sie: $\sup M_1 = \sup M_2 = \sup M_3 = \sup M_4 = \sup M_5$.

c) Geben Sie für $j = 1, 2, 3, 4$ Folgen reeller Zahlen $(a_i^j)_{i \geq 0}$ an, für die jeweils $M_{j+1} \neq M_j$ gilt.

(6 = 2+2+2 Punkte)

Aufgabe 8) Mit den am Anfang von Kapitel 17 definierten Bernoullipolynomen $B_n(t)$ bilden wir für $t, z \in \mathbb{R}$ die Reihe:

$$f_t(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \cdot \frac{z^n}{n!}.$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ und jedes $a > 0$ die Reihe gleichmäßig in $z \in [-a, a]$ konvergiert.

b) Zeigen Sie: $f_t(z)$ ist in der Variablen t differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = z \cdot f_t(z).$$

c) Zeigen Sie: $\int_0^1 f_t(z) dt = 1$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

d) Zeigen Sie:

$$f_t(z) = \frac{z \cdot e^{tz}}{e^z - 1} \text{ für } z \neq 0, \quad f_t(0) = 1.$$

(6=2+1+1+2 Punkte)