Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis II SS 2006

Blatt 1 Abgabe bis zum 05.05.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie drei der vier Aufgaben!

Aufgabe 1) Zeigen Sie: Sind V_1, V_2, V_3 drei normierte Vektorräume und $L_1 : V_1 \to V_2$ sowie $L_2 : V_2 \to V_3$ stetige lineare Abbildungen, so ist auch $L = L_2 \circ L_1 : V_1 \to V_3$ eine stetige lineare Abbildung, und es gilt:

$$\|L\| \ \leq \ \|L_2\| \cdot \|L_1\|.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2) a) Zeigen Sie: Für alle Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$ gibt es genau ein $\phi \in [0, 2\pi)$ mit $x = \cos(\phi), y = \sin(\phi)$.

b) Zeigen Sie: für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(z) = \exp(x) \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y)).$$

c) Zeigen Sie: die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ ist surjektiv; es gilt genau dann $\exp(z_1) = \exp(z_2)$, wenn es $n \in \mathbb{Z}$ gibt mit $z_2 = z_1 + 2\pi in$.

(6=2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$f(x, y) \ = \ \frac{xy^3}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{ und } f(0, 0) = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes feste y die Funktion $x \mapsto f(x, y)$ stetig differenzierbar ist. Bestimmen Sie die Ableitung $f_x(x, y) = \frac{df}{dx}(x, y)$.

b) Zeigen Sie, dass für jedes feste x die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ stetig differenzierbar ist. Bestimmen Sie die Ableitung $f_y(x, y) = \frac{df}{dy}(x, y)$.

c) Zeigen Sie, dass für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $y \mapsto f_x(x, y)$ stetig differenzierbar ist und dass für jedes feste $y \in \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto f_y(x, y)$ stetig differenzierbar ist.

d) Bestimmen Sie die Ableitungen von $y \mapsto f_x(0, y)$ und von $x \mapsto f_y(x, 0)$ im Nullpunkt.

(6=2+1+2+1 Punkte)

Aufgabe 4) Für vorgegebene $k, a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ werde die Folge a_n rekursiv definiert durch:

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - k}{(n+2)(n+1)} \cdot a_n \quad \text{für } n \geq 0.$$

a) Zeigen Sie, dass es für jedes $k \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_{n+2}| \leq |a_n|$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

für alle $x \in (-1, 1)$ konvergiert und dass die Grenzfunktion f zweimal stetig differenzierbar ist und die Differentialgleichung

$$(1 - x^2) \cdot f''(x) - 2xf'(x) + k \cdot f(x) = 0 \quad \text{erfüllt.}$$

Zusatzfrage: welche Besonderheit ergibt sich, wenn k von der Form $k = m(m + 1)$ mit $m \in \mathbb{N}$ ist?

(6=2+4 Punkte)