Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼weselman/Uebungen.html

Übungen zur Analysis I WS 2005/2006

Blatt 2, Abgabe bis zum 04.11.2005 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie maximal 3 Aufgaben:

Aufgabe 5) Seien a, b, c, d Elemente eines angeordneten Körpers. Beweisen Sie die Ungleichungen:

(a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

(b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

(c) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

(5 Punkte)

Aufgabe 6) (a) Sei K ein Körper und $P \subset K$ eine Teilmenge, die folgenden Axiomen genügt:

(P1) Für jedes $a \in K$ gilt entweder $a = 0$ oder $a \in P$ oder $-a \in P$.

(P2) Aus $a, b \in P$ folgt $a + b \in P$.

(P3) Aus $a, b \in P$ folgt $a \cdot b \in P$.

Zeigen Sie, dass durch

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad b - a \in P$$

eine Anordnung von K definiert wird.

(b) Zeigen Sie: Ist K ein angeordneter Körper, so erfüllt $P = \{a \in K | 0 < a\}$ die Axiome (P1) bis (P3).

(5 Punkte)

Aufgabe 7) Sei $d \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, die das Quadrat einer rationalen Zahl $\xi \in \mathbb{Q}$ sei: $d = \xi^2$. Wir wollen beweisen, dass $d = n^2$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt: O.B.d.A. ist $\xi \geq 0$. Sei m die kleinste natürliche Zahl mit $m \cdot \xi \in \mathbb{N}$ und $m > 0$. Sei n die kleinste natürliche Zahl mit $\xi \leq n$. Warum existiert diese? Sei $p = m \cdot (\xi - n + 1)$.

Zeigen Sie:

(a) $p \in \mathbb{N}$ und $0 < p \leq m$;

(b) $p \cdot \xi \in \mathbb{N}$;

(c) $p = m$ und $\xi = n$.

Folgerung: Ist $d \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl, d.h. $d \in \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, \ldots\}$, so hat die Gleichung $x^2 = d$ keine Lösung mit $x \in \mathbb{Q} = F$ und durch die Konstruktion aus Aufgabe 4 erhält man einen Körper K.

(5 Punkte)

Aufgabe 8) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+b\cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $\frac{17}{2+8i}$

(b) $\rho^2, \rho^3, \rho^5, \rho^6$ für $\rho = \frac{1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$

(c) σ^2, σ^4 für $\sigma = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

(d) $\zeta^2, \zeta^4, \zeta^5, \zeta^{2005}$ für $\zeta = \frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}\cdot i}{4}$.

Lösen Sie entweder die Teilaufgaben (a),(b),(c) oder aber (a),(d).

(5 Punkte)