Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis I WS 2005/2006

Blatt 14

Keine Abgabe

Aufgabe 55) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} \quad = \quad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, e^t dt.$$

Aufgabe 56) Zeigen Sie: die Abbildung

$$+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (a,b) \mapsto a+b$$

ist gleichmäßig stetig bezüglich der euklidischen Standardmetrik.

Aufgabe 57) Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(0) = 0$ sowie $f_n(x) = x^n \cdot \sin(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass f_n für jedes $n \geq 1$ stetig ist.

(b) Untersuchen Sie mit Beweis, wie oft f_1, f_2 und f_4 im Nullpunkt differenzierbar sind.

Aufgabe 58) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} \qquad B = \lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+n} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1} \right)$$

$$C = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}.$$

Aufgabe 59) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und periodische Funktion mit Periode $p > 0$:

$$f(x+p) \quad = \quad f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = x$.

(b) Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 60) (a) Zeigen Sie: für jedes Polynom $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ konvergiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(x) \cdot e^{-x^2} dx \quad := \quad \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} Q(x) \cdot e^{-x^2} dx.$$

(b) Durch

$$(Q_1, Q_2) := \int_{-\infty}^{\infty} Q_1(x) Q_2(x) e^{-x^2} dx$$

wird auf $\mathbb{R}[X]$ ein Skalarprodukt definiert. Die Abbildung $S : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ sei definiert durch:

$$SP(x) = 2x \cdot P'(x) - P''(x).$$

Zeigen Sie: $(SQ_1, Q_2) = (Q_1, SQ_2)$ für alle $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$.

(c) Die Hermite-Polynome sind für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch:

$$H_n(x) = (-1)^n \cdot e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right).$$

Zeigen Sie, dass H_n den Grad n hat und dass $(H_n, Q) = 0$ für alle Polynome Q vom Grad $\leq n - 1$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass H_n genau n reelle Nullstellen hat.