Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis I WS 2005/2006

Blatt 13 Abgabe bis Freitag 10.02.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie drei Aufgaben:

Aufgabe 51) Berechnen Sie für folgende Funktionen jeweils eine Stammfunktion:

$$f_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \qquad f_2 : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{(1-x) \cdot \sqrt{x}}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 52) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) \quad = \quad \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine bijektive stetige Abbildung von $\mathbb{R}$ auf ein offenes Intervall der Form $(-a, a)$ ist.

(b) Sei $g : (-a, a) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion. Zeigen Sie, dass g differenzierbar ist und drücken Sie g' durch g aus.

(c) Für $x \in (-2a, 2a)$ werde definiert:

$$h_1(x) = \frac{2 \cdot g\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + g\left(\frac{x}{2}\right)^2} \quad \text{und} \quad h_2(x) = \frac{1 - g\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1 + g\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Berechnen Sie h_1' und h_2' sowie $h_1(0)$ und $h_2(0)$.

(4=1+1+2 Punkte)

Aufgabe 53) Irrationalität von π:

In den Bezeichungen und Notationen der Aufgabe 50 setze man für $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n \quad = \quad \frac{1}{n!} \cdot \int_0^\pi x^n \cdot (\pi - x)^n \cdot s(x) dx.$$

(a) Berechnen Sie A_0 und A_1 und zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ gilt:

$$A_{n+1} \quad = \quad -\pi^2 \cdot A_{n-1} + (4n+2) \cdot A_n.$$

(b) Zeigen Sie, dass es für jedes reelle $b > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $0 < b^n \cdot A_n < 1$ für alle $n \geq N_0$.

(c) Zeigen Sie, dass $b^n \cdot A_n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wäre, wenn π eine rationale Zahl mit Nenner $b \in \mathbb{N}, b > 0$ wäre. Folgern Sie daraus, dass $\pi \notin \mathbb{Q}$ gilt.

(5=3+1+1 Punkte)

Aufgabe 54) (a) Zeigen Sie: für jedes Polynom $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ konvergiert

$$\int_0^\infty Q(x) \cdot e^{-x} dx \quad := \quad \lim_{a \to \infty} \int_0^a Q(x) \cdot e^{-x} dx.$$

(b) Durch $(Q_1, Q_2) := \int_0^\infty Q_1(x) Q_2(x) e^{-x} dx$ wird auf $\mathbb{R}[X]$ ein Skalarprodukt definiert. Die Abbildung $S : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ sei definiert durch:

$$SP(x) = (x-1)P'(x) - xP''(x).$$

Zeigen Sie: $(SQ_1, Q_2) = (Q_1, SQ_2)$ für alle $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$.

(c) Die Laguerre-Polynome sind für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot e^x \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n \cdot e^{-x} \right).$$

Zeigen Sie, dass $(L_n, Q) = 0$ für alle Polynome Q vom Grad $\leq n-1$ gilt, und berechnen Sie (L_n, L_n).

(5=1+2+2 Punkte)