Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis I WS 2005/2006

Blatt 12 Abgabe bis Freitag 03.02.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie drei Aufgaben:

Aufgabe 47) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, wobei $a > 0$ eine reelle Zahl sei:

$$A(a) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \qquad B(a) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \big(\sqrt[n]{a} - 1\big)$$

$$C = \lim_{n\to\infty} \big(n \cdot \big(\sqrt[n]{n} - 1\big) - \log n\big) \qquad D(a) = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \big(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}\big)$$

(4 Punkte)

Aufgabe 48) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion, so heißt $(x, f(x))$ ein Wendepunkt des Graphen von f, wenn $f''(x) = 0$ gilt.

Berechnen Sie die Wendepunkte und die Steigungen der Wendetangente für die Funktionen:

$$f_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{-x^2}, \qquad f_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 49) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir $f_\alpha^+, f_\alpha^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch:

$$\begin{aligned} f_\alpha^+(x) &= f_\alpha^-(x) = |x|^\alpha && \text{für } x > 0; \\ f_\alpha^+(x) &= -f_\alpha^-(x) = |x|^\alpha && \text{für } x < 0; \\ f_\alpha^+(0) &= f_\alpha^-(0) = 0. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass f_α^+ und f_α^- genau dann stetig sind, wenn $\alpha > 0$ gilt.

(b) Sei $n < \alpha < n+1$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass f_α^+ und f_α^- genau n mal differenzierbar sind.

(4=1+3 Punkte)

Aufgabe 50) Seien $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, für die gilt:

$$(*) \qquad s' = c, \qquad c' = -s, \qquad s(0) = 0, \qquad c(0) = 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und folgern Sie daraus, dass $|c(x)| \leq 1$ und $|s(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $s(x) > 0$ für alle x mit $0 < x \leq 2$ gilt, und dass $c(2) < 0$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass c im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle x_0 hat und dass für diese Nullstelle $s(x_0) = 1$ gilt.

(d) Zeigen Sie von einer der beiden folgenden Gleichungen, dass sie für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten:

$$s(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad\qquad c(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

(e) Folgern Sie, dass das Paar (s, c) durch die Gleichungen (*) eindeutig bestimmt ist. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$s(-x) = -s(x) \qquad \text{und} \qquad c(-x) = c(x)$$

$$s(x + x_0) = c(x) \qquad \text{und} \qquad c(x + x_0) = -s(x)$$

(f) Mit $\pi = 2 \cdot x_0$ zeige man:

$$s(x + \pi) = -s(x), \qquad c(x + \pi) = -c(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$0 < s(x) \leq 1 \qquad \text{für } 0 < x < \pi.$$

(7 =1+2+1+1+1+1 Punkte)