Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis I WS 2005/2006

Blatt 11 Abgabe bis Freitag 27.01.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie drei Aufgaben:

Aufgabe 43) (a) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen *sinh*, *cosh* und *tanh* aus Aufgabe 31.

(b) Zeigen Sie, dass die Funtion $tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist und $\mathbb{R}$ bijektiv auf das offene Intervall $(-1, 1)$ abbildet.

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion $Artanh : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ des *tanh* differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.

(4=1+1+2 Punkte)

Aufgabe 44) (a) Zeigen Sie, dass die Polynomfunktion $p(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}$ genau eine reelle Nullstelle x_0 hat.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Wurzelfunktion $\sqrt{\quad} : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (mit Beweis!).

(c) Für die Funktion

$$f : [x_0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{p(x)}$$

berechne man die Ableitung und die lokalen Extremwerte. Berechnen Sie den zweiten Schnittpunkt $(x_2, f(x_2))$ der Tangente im lokalen Maximum $(x_1, f(x_1))$ mit dem Graphen der Funktion f, sowie den Schnittpunkt der Tangente im Punkt $(x_2, f(x_2))$ an f mit dem Graphen der Funktion $-f$. Skizzieren Sie die Graphen von f und $-f$ zusammen mit den Tangenten und deren Spiegelbildern an der x-Achse.

(4=1+1+2 Punkte)

Aufgabe 45) Sei $\mathbb{R}[X]$ der Raum der Polynomfunktionen. Die Legendre Polynome $P_n \in \mathbb{R}[X]$ sind definiert durch

$$P_n(x) \quad = \quad \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right).$$

(a) Zeigen Sie: P_n hat genau n paarweise verschiedene Nullstellen im Intervall $[-1,1]$.

(b) Die Abbildung S bildet $\mathbb{R}[X]$ in sich ab und ist definiert durch

$$SP(X) \quad = \quad (x^2-1) \cdot P''(x) + 2x \cdot P'(x).$$

Zeigen Sie: $\quad SP_n = n(n+1) \cdot P_n$.

(c) Zeigen Sie, dass für beliebige Polynomfunktionen $Q_1(x), Q_2(x)$ gilt:

$$\int_{-1}^{1} SQ_1(x) \cdot Q_2(x)dx \quad = \quad \int_{-1}^{1} Q_1(x) \cdot SQ_2(x)dx.$$

(d) Zeigen Sie: $\quad \displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_m(x)dx \quad = \quad 0 \qquad$ für $m \neq n$.

(4 Punkte)

Aufgabe 46) (a) Zeigen Sie: Die Folge

$$a_n \quad = \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

konvergiert, und zwar gegen $log(2)$.

(b) Zeigen Sie mit Mitteln der Integralrechnung, dass $\log(ac) = \log(a) + \log(c)$ für alle $a, c > 0$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - log(n)$$

monoton steigt, 1 als obere Schranke hat und deshalb gegen einen Grenzwert $c = \lim_{n\to\infty} c_n$ (die *Euler-Mascheronische Konstante*) konvergiert.

(4= 1+1+2 Punkte)