Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis I WS 2005/2006

Blatt 10 Abgabe bis Freitag 20.01.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie die Aufgaben 39, 42 und wahlweise 40 oder 41:

Aufgabe 39) Für reelle Zahlen $a < b$ sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion. Zeigen Sie, dass f integrierbar ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 40) (a) Für reelle $0 < a < b$ und natürliches $N > 0$ betrachten wir die Zerlegung $Z_N = \{x_0, \ldots, x_N\}$ des Intervalls $[a, b]$ mit

$$x_i = a + \frac{i \cdot (b-a)}{N}, \quad i = 0, 1, \ldots, N.$$

Berechnen Sie $O(Z_N, f)$ und $U(Z_N, f)$ für die Funktion $f(x) = x^2$. Geben Sie dabei geschlossene Formeln für die Summen an.

(b) Mit Hilfe von (a) zeige man, dass f integrierbar ist, und berechne $\int_a^b f(x)dx$, ohne den Hauptsatz zu benutzen.

(4 =2+2 Punkte)

Aufgabe 41) Für die Funktion $f(x) = x^{-2}$ und reelle $0 < a < b$ zeige man, dass für jede Unterteilung Z des Intervalls $[a, b]$ folgende Abschätzung gilt:

$$U(Z, f) \;\leq\; \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \;\leq\; O(Z, f).$$

Mit Hilfe von Aufgabe 39 folgere man daraus, dass $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ gilt, ohne den Hauptsatz zu benutzen.

(4 Punkte)

Aufgabe 42) Die Funktion $f : I = [0, 1] \to \mathbb{R}$ erfülle die Bedingung:

(*) für alle $\epsilon > 0$ gibt es nur endlich viele $x \in I$ mit $|f(x)| \geq \epsilon$.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann in einem Punkt $x \in I$ stetig ist, wenn $f(x) = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass f integrierbar ist, und berechnen Sie $\int_0^1 f(x)dx$.

(c) Zeigen Sie, dass durch

$f(x) = 0$ für $x \in I, x \notin \mathbb{Q}$ und

$f(x) = \frac{1}{q}$ für $x = \frac{p}{q} \in I$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen $p \geq 0,\ q \geq 1$

eine Funktion f definiert wird, die die Bedingung (*) erfüllt.

(6 Punkte =2+2+2)