

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie SS 2007

Lösungshinweise Blatt 7

Aufgabe 26) Lösungsskizze:

(a) Zunächst wird untersucht, für welche a das Polynom p_a irreduzibel ist: das ist genau dann der Fall, wenn es keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$ hat. Da das Polynom ganzzahlige Koeffizienten mit Leitkoeffizienten = 1 hat, kommen (Algebra I) unter den rationalen Zahlen nur diejenigen ganzen Zahlen als Nullstellen in Frage, die den konstanten Koeffizienten teilen. Das sind hier nur -1 und 1 . Dann sieht man sofort, dass für $a = 2$ der Wert $\alpha_1 = 1$ eine Nullstelle ist, für die anderen Werte von a liegen keine Nullstellen vor, d.h. das Polynom ist dann irreduzibel.

Die Lösungstheorie der irreduziblen Polynome dritten Grades besagt nun, dass man zum Grundkörper zunächst die Quadratwurzel aus der Diskriminante

$$\sqrt{D} = (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot (\alpha_1 - \alpha_3) \cdot (\alpha_2 - \alpha_3)$$

adjungieren muss. Ist das Polynom vom Typ $P(X) = X^3 - aX + b$, so gilt $D = 4a^3 - 27b^2$. Hier ist immer $b = 1$. Über dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ hat dann der Zerfällungskörper K_a den Grad 3. Die Lösungsformeln benötigen wir im folgenden jedoch nicht.

Damit erhalten wir:

Der Fall $a = 1$: Dann ist $D = -23$. Da das kein Quadrat ist, folgt

$$[K_1 : \mathbb{Q}] = 2 \cdot [K_1 : \mathbb{Q}(\sqrt{-23})] = 6.$$

Da $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ nicht nach $\mathbb{R}$ eingebettet werden kann, gilt gleiches für K_1 , so dass wir drei komplexe Einbettungen bekommen. Es folgt $K_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathbb{C}^3$. Die Einheitengruppe $\mathcal{O}_{K_1}^*$ hat deshalb den Rang 2.

Der Fall $a = 2$: Dann ist $D = 5$ und $p_2(X) = (X - 1) \cdot (X^2 + X - 1) = (X - 1) \cdot (X - \alpha_2) \cdot (X - \alpha_3)$ mit

$$\alpha_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Also gilt $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ sowie $[K_2 : \mathbb{Q}] = 2$ und $K_2 \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Weiterhin hat die Einheitengruppe $\mathcal{O}_{K_2}^*$ den Rang 1.

Der Fall $a = 3$: Dann ist $D = 81$. Da das ein Quadrat ist, folgt $[K_3 : \mathbb{Q}] = 3$. Damit haben wir eine Galoiserweiterung vorliegen, wenn wir nur eine Nullstelle adjungieren. Da es eine reelle Nullstelle gibt, müssen die anderen Nullstellen auch reell sein. Also folgt $K_3 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Die Einheitengruppe $\mathcal{O}_{K_3}^*$ hat deshalb den Rang 2.

Übrigens ist das $\omega = 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) = \zeta + \zeta^{-1}$ aus Aufgabe 1) eine der Nullstellen, sagen wir α_1 . Die anderen sind dann $\alpha_2 = 2 \cdot \cos\left(2\frac{2\pi}{9}\right) = \zeta^2 + \zeta^{-2}$ und $\alpha_3 = 2 \cdot \cos\left(4\frac{2\pi}{9}\right) = \zeta^4 + \zeta^{-4}$. Der Körper K_3 hat Index 2 im Körper der 9-ten Einheitswurzeln.

Der Fall $a = 4$: Dann ist $D = 229$. Da das kein Quadrat ist, folgt

$$[K_4 : \mathbb{Q}] = 2 \cdot [K_4 : \mathbb{Q}(\sqrt{229})] = 6.$$

Da $\mathbb{Q}(\sqrt{229})$ eine (sogar zwei) reelle Einbettungen hat und da mindestens eine Nullstelle von p_4 reell ist, folgt, dass K_4 eine reelle Einbettung hat. Da K_4 eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ ist, müssen dann aber alle anderen Einbettungen auch reell sein, so dass wir insgesamt sechs reelle Einbettungen bekommen. Es folgt $K_4 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^6$. Die Einheitengruppe $\mathcal{O}_{K_4}^*$ hat deshalb den Rang 5.

(b) Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind per Konstruktion ganz. Wegen $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = -1$ sind sie dann Einheiten und die von ihnen erzeugte Untergruppe G_a hat höchstens den Rang 2.

Für $a = 2$ hat G_2 , weil $\alpha_1 = 1$ gilt und weil α_2 keine Einheitswurzel ist, den Rang 1, also endlichen Index in $\mathcal{O}_{K_2}^*$. Genauer gesagt gilt sogar $G_2 = \mathcal{O}_{K_2}^*$.

Für $a = 1$ und $a = 3$ kann man sich leicht davon überzeugen, dass G_a den Rang 2 und somit endlichen Index in $\mathcal{O}_{K_a}^*$ hat: Das kann man z.B. überprüfen, indem man die Logarithmen der Absolutbeträge der archimedischen Einbettungen näherungsweise berechnet und sich davon überzeugt, dass die entsprechenden Vektoren (in einem zweidimensionalen Raum) linear unabhängig sind.

Man kann auch algebraisch argumentieren, indem man auf eine mögliche Relation der Form $\alpha_1^r = \alpha_2^s$ die Galoisgruppe anwendet und dann eine Relation herleitet, die offensichtlich falsch ist.

Im Fall $a = 4$ kann man sich ebenso davon überzeugen, dass G_a den Rang 2 hat. Der Index in $\mathcal{O}_{K_4}^*$ ist dann natürlich nicht endlich.

(c) Ein vollständiges Erzeugendensystem von $\mathcal{O}_{K_4}^*$ anzugeben, lassen wir weiterhin als Übungsaufgabe offen. Wir konstruieren im folgenden eine Untergruppe E vom endlichen Index:

Zunächst kann man die Relation $\alpha_i^3 - 4\alpha_i + 1 = 0$ in der Form

$$(\alpha_i - 2)(\alpha_i + 2)\alpha_i = -1$$

umschreiben und daraus ablesen, dass auch $\alpha_i + 2$ und $\alpha_i - 2$ Einheiten sind. Dann kann man sich überlegen, dass $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + 2, \alpha_2 + 2$ eine Untergruppe vom Rang 4 erzeugen.

Diese Untergruppe hat endlichen Index in der Gruppe derjenigen Einheiten, die bei der Normabbildung von K_4 nach $\mathbb{Q}(\sqrt{229})$ auf ± 1 abgebildet werden. Zusammen mit der Grundeinheit $\epsilon = \frac{15 - \sqrt{229}}{2}$ des quadratischen Zahlkörpers erzeugen sie dann eine Untergruppe von endlichem Index in $\mathcal{O}_{K_4}^*$.