Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie SS 2007

Blatt 8 Abgabe bis Donnerstag 14.06.2007 um 14:00 Uhr

Aufgabe 27) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$ und $L = K(\sqrt{2})$.

(a) Berechne die Diskriminanten $D_{K/\mathbb{Q}}$ und $D_{L/\mathbb{Q}}$ sowie alle in $K/\mathbb{Q}$ und $L/\mathbb{Q}$ verzweigten Primideale (p).

(b) Zeige, dass jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}_K$ in der Erweiterung L/K unverzweigt ist.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 28) Sei $l > 2$ prim und $K = \mathbb{Q}(\zeta_l)$ mit einer primitiven l-ten Einheitswurzel ζ_l der zugehörige Kreisteilungskörper. Sei $p \neq l$ eine weitere Primzahl.

(a) Zeige, dass das Ideal (p) in der Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ unverzweigt ist und dass der Restklassengrad gleich der kleinsten natürlichen Zahl f ist, für die $p^f \equiv 1 \; mod \; l$ gilt.

(b) Im Fall $l \equiv 3 \; mod \; 4$ zeige man, dass f genau dann ungerade ist, wenn die Kongruenz $x^2 \equiv p \; mod \; l$ eine ganzzahlige Lösung besitzt.

(c) Im Fall $l \equiv 3 \; mod \; 4$ zeige man, dass f genau dann ungerade ist, wenn das Primideal (p) im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-l})$ in zwei Ideale zerfällt. (Hinweis: Aufgabe 5 benutzen)

(d) Wie hängen im Fall $l \equiv 3 \; mod \; 4$ die Lösbarkeiten der beiden Kongruenzen $x^2 \equiv p \; mod \; l$ und $y^2 \equiv -l \; mod \; p$ miteinander zusammen? (Hinweis: Aufgabe 25 benutzen)

(6=2+1+2+1 Punkte)

Aufgabe 29) (a) In den Bezeichnungen der Aufgabe 28) zeige man, dass das Primideal (l) in $K/\mathbb{Q}$ total verzweigt:

$$(l) = \mathfrak{l}^{l-1}$$

und dass für alle $a = 1, 2, \ldots, p-1$ gilt:

$$\mathfrak{l} = (1 - \zeta_l^a).$$

(b) Wie kann man aus den Darstellungen von $\mathfrak{l}$ als Hauptideal in (a) Einheiten in $\mathcal{O}_K^*$ gewinnen? Hat die von den so gewonnenen Einheiten erzeugte Gruppe einen endlichen Index in $\mathcal{O}_K^*$?

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 30) Seien K, L, M Körper mit $K \subset L$ und $K \subset M$, so dass M/K eine endliche Galois-Erweiterung sei und so dass

$$\Sigma = \{\sigma : L \to M \mid \sigma \text{ ist injektiver Körperhomomorphismus und } \sigma|_K = id_K\}$$

nicht leer sei.

Zeige, dass durch die Vorschrift

$$\Phi : L \otimes_K M \to \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} M, \qquad a \otimes b \mapsto (\sigma(a) \cdot b)_{\sigma \in \Sigma}$$

ein Ringisomorphismus Φ festgelegt wird.

(4 Punkte)