Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie SS 2007

Blatt 7 Abgabe bis Freitag 08.06.2007 um 11:00 Uhr

Aufgabe 23) Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und M_1, M_2, M_3, N jeweils R-Moduln.

(a) Zeige: Ist

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i} M_2 \xrightarrow{j} M_3 \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz, so ist auch

$$M_1 \otimes_R N \xrightarrow{i \otimes id} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{j \otimes id} M_3 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

exakt.

(b) Sei $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$. Im Fall $R = M_1 = M_2 = \mathbb{Z}$ und $i(x) = m \cdot x$, also $M_3 = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, sowie $N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zeige man, dass $i \otimes id$ genau dann injektiv ist, wenn m und n teilerfremd sind.

(4=3+1 Punkte)

Aufgabe 24) Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ und $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$.

Wie verhält sich das Primideal (2) von $\mathbb{Z}$ im Körper K, wenn

(a) $d \equiv 1 \; mod \; 8$ gilt;

(b) $d \equiv 5 \; mod \; 8$ gilt;

(c) $d \equiv 2, 3 \; mod \; 4$ gilt?

Beschreibe jeweils explizit die Primideale $\mathfrak{p}_i$ in der Zerlegung $(2) = \prod_i \mathfrak{p}_i^{n_i}$.

(4=1+1+2 Punkte)

Aufgabe 25) Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ und $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$. Sei $p > 2$ eine Primzahl. Wie verhält sich das Primideal (p) von $\mathbb{Z}$ im Körper K, wenn

(a) p ein Teiler von d ist;

(b) p kein Teiler von d ist und die Kongruenz $x^2 \equiv d \mathit{\ mod\ } p$ eine Lösung in $\mathbb{Z}$ hat;

(c) p kein Teiler von d ist und die Kongruenz $x^2 \equiv d \mathit{\ mod\ } p$ keine Lösung in $\mathbb{Z}$ hat?

Beschreibe jeweils explizit die Primideale $\mathfrak{p}_i$ in der Zerlegung $(p) = \prod_i \mathfrak{p}_i^{n_i}$.

(4=1+2+1 Punkte)

Aufgabe 26) Für $a = 1, 2, 3, 4$ sei K_a der Zerfällungskörper des Polynoms $p_a(X) = X^3 - aX + 1$ über dem Grundkörper $\mathbb{Q}$. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Nullstellen von $p_a(X)$ in K_a.

(a) Berechne jeweils $n_a = [K_a : \mathbb{Q}]$ sowie $K_a \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

(b) In welchen Fällen hat die von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ erzeugte Untergruppe G_a von $\mathcal{O}_{K_a}^*$ einen endlichen Index in der Einheitengruppe $\mathcal{O}_{K_a}^*$?

(c*) Gib Erzeugende von $\mathcal{O}_{K_a}^*$ an, wenn G_a keinen endlichen Index in $\mathcal{O}_{K_a}^*$ hat.

(6=2+2+2 Punkte)