Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie SS 2007

Blatt 6   Abgabe bis Donnerstag 31.05.2007 um 14:00 Uhr

Aufgabe 19) In der Definition der Quader werde für komplexe Stellen die Bedingung $|x_v|_v \leq c_v$ durch die Bedingungen $|Re(x_v)| \leq c_v$ und $|Im(x_v)| \leq c_v$ ersetzt.

Wie ändern sich dadurch die Rechnungen und Lemmata im Beweis der Endlichkeit der Klassenzahl? Wie sieht die modifizierte Konstante δ_K aus?

(2 Punkte)

Aufgabe 20) Für die folgenden Zahlkörper K bestimme man die Konstante δ_K sowie alle Ideale $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ mit $N(\mathfrak{a}) \leq \delta_K$, und berechne dann mit Hilfe früherer Aufgaben die Idealklassengruppe:

(a) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$ (3 Punkte);

(b) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ (3 Punkte).

Aufgabe 21) Die Menge $X = \{(a, b) \in \mathbb{A}_K \times \mathbb{A}_K | a \cdot b = 1\}$ ist eine Gruppe bezüglich der kompononentenweisen Multiplikation und wird mit der Unterraumtopologie der Produkttopologie versehen.

(a) Zeige, dass die Projektion auf die erste Komponente $\pi : X \to \mathbb{A}_K$ einen Gruppenisomorphismus mit der Gruppe der Idele $\mathbb{I}_K \subset \mathbb{A}_K$ definiert und dass $\pi : X \to \mathbb{I}_K$ ein Homöomorphismus ist.

(b) Wie kann man die Folgenkonvergenz für Idele auf die Folgenkonvergenz von Adelen zurückführen? Konvergiert die Folge a_n aus Aufgabe 17) gegen 1 bezüglich der Ideltopologie?

(3=2+1 Punkte)

Aufgabe 22) Seien $(X_n), (Y_n), (Z_n)$ projektive Systeme abelscher Gruppen. Weiterhin seien kurze exakte Sequenzen

$$0 \to X_n \to Y_n \to Z_n \to 0$$

gegeben, die mit den mit Übergangssabbildungen kommutieren:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & Y_{n+1} & \xrightarrow{j_{n+1}} & Z_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{n,X}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{n,Y}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{n,Z}} & & \\
0 & \longrightarrow & X_n & \xrightarrow{i_n} & Y_n & \xrightarrow{j_n} & Z_n & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

(a) Zeige, dass die Abbildungen i_n und j_n eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \varprojlim X_n \xrightarrow{i} \varprojlim Y_n \xrightarrow{j} \varprojlim Z_n$$

induzieren. Dabei ist

$$\varprojlim X_n = \left\{ (x_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \;\middle|\; \pi_{n,X}(x_{n+1}) = x_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{usw.}$$

(b) Die Abbildungen $\pi_{n,X}$ seien für alle $n \in \mathbb{N}$ surjektiv. Zeige, dass dann die Abbildung j surjektiv ist.

(4=2+2 Punkte)