Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie SS 2007

Blatt 5 Abgabe bis Donnerstag 24.05.2007 um 14:00 Uhr

Aufgabe 15) (a) Zeige: Jede offene und kompakte Untergruppe U von $(\mathbb{Q}_p, +)$ ist von der Form $U = p^n \cdot \mathbb{Z}_p$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

(3 Punkte)

Aufgabe 16) Für einen Zahlkörper K bezeichne

$$\mathbb{A}_{K,fin} = \{(x_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\ Primideal} \mid |x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} \leq 1 \text{ für fast alle } \mathfrak{p}\}$$

den Ring der endlichen Adele. Es gilt dann also

$$\mathbb{A}_K = \mathbb{A}_{K,\infty} \times \mathbb{A}_{K,fin} \quad \text{mit} \quad \mathbb{A}_{K,\infty} = K \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R} = \prod_{\sigma\ archimed.Stelle} K_\sigma.$$

Sei $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p\ prim} \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}$.

(a) Zeige:

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q},fin} = \mathbb{Q} + \hat{\mathbb{Z}} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{Q} \cap \hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z},$$

wobei $\mathbb{Q}$ hier diagonal nach $\mathbb{A}_{Q,fin}$ eingebettet wird.

(b) Zeige, dass jede offene und kompakte Untergruppe U von $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},fin}$ von der Form $U = \gamma \cdot \hat{\mathbb{Z}}$ mit $\gamma \in \mathbb{Q}^*$ ist.

(c) Zeige: für eine offene und kompakte Untergruppe $U \subset \mathbb{A}_{\mathbb{Q},fin}$ ist

$$\mathbb{A}_Q / \left(\mathbb{Q} + (\{0\} \times U)\right)$$

zu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ topologisch isomorph.

(6=2+2+2 Punkte)

Aufgabe 17) Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ sei p_n die n-te Primzahl und das Adel $a_n \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ (bzw. $b_n \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$) sei dadurch definiert, dass alle Komponenten bis auf die p_n Komponente gleich 1 sind und dass die p_n Komponente gleich p_n (bzw. p_n^{-1}) ist. Sei $1 = (1, 1, 1, \ldots)$ das Einsadel.

Untersuche, ob die Folgen a_n und b_n bezüglich der adelischen Topologie gegen 1 konvergieren.

(3 Punkte)

Aufgabe 18) Für $a = (a_\infty, a_f) \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_{\mathbb{Q},fin}$ gibt es nach Aufgabe 16) ein $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $a_f - \alpha \in \hat{\mathbb{Z}}$.

(a) Zeige: Durch

$$\psi(a) = \exp(-2\pi i a_\infty) \cdot \exp(2\pi i \alpha) \in S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* | \, |z| = 1\}$$

wird ein Homomorphismus $\psi : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \to S^1$ (wohl)definiert, der auf $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ trivial ist.

(b) Zeige: für $b \in \mathbb{A}_Q$ ist die Einschränkung des Homomorphismus

$$\psi_b : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \to S^1, \ a \mapsto \psi(a \cdot b)$$

auf $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ genau dann trivial, wenn $b \in \mathbb{Q}$ gilt.

(4=2+2 Punkte)