Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie SS 2007

Blatt 4 Abgabe bis Donnerstag 17.05.2007 um 14:00 Uhr

Aufgabe 11) Sei K ein algebraischer Zahlkörper, $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ ein Primideal, $\hat{K} = \hat{K}_\mathfrak{p}$ sei die $\mathfrak{p}$-adische Komplettierung von K, $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_{\hat{K}}$ das von $\mathfrak{p}$ erzeugte maximale Ideal. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\mathcal{O}_K \hookrightarrow \mathcal{O}_{\hat{K}}$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^n \quad \tilde{\to} \mathcal{O}_{\hat{K}}/\mathfrak{m}^n$$

induziert.

(4 Punkte)

Aufgabe 12) In den Bezeichnungen von Aufgabe 11) sei $2 \notin \mathfrak{p}$ sowie $a \in \mathcal{O}_{\hat{K}}^*$ vorgegeben. Sei $b \in \mathcal{O}_{\hat{K}}$ mit $b^2 - a \in \mathfrak{m}$.

Zeige: die durch

$$x_0 = b, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

rekursiv definierte Folge ist eine Cauchyfolge in $\hat{K}$, und für ihren Grenzwert $\beta = \lim_{n\to\infty}$ gilt: $\beta^2 = a$.

Tipp: leite rekursive Formeln für $|x_n|_\mathfrak{p}$ und $|x_n^2 - a|_\mathfrak{p}$ her. (4 Punkte)

Aufgabe 13) In den Bezeichnungen von Aufgabe 11) sei $q = N(\mathfrak{p}) = \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$. Für $a \in \mathcal{O}_K^*$ sei $M_a = \{\alpha \in \mathcal{O}_{\hat{K}} | \alpha \cong a \; mod \; \mathfrak{m}\}$.

(a) Zeige, dass $F : x \mapsto x^q$ eine kontraktive Selbstabbildung von M_a ist.

(b) Zeige, dass sich jedes Element $a \in \mathcal{O}_K^*$ eindeutig in der Form $a = \zeta \cdot b$ mit $\zeta^{q-1} = 1$ und $b \in M_1$ darstellen lässt.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 14) Konstruiere explizit eine Folge ganzer Zahlen $x_n \in \mathbb{Z}$ mit

$$\left| x_n - \frac{1}{7} \right|_5 \leq \frac{1}{5^n} \qquad \text{und} \qquad \left| x_n - \frac{1}{5} \right|_7 \leq \frac{1}{7^n}.$$

Tipp: man konstruiere zunächst Folgen y_n bzw. z_n, die nur eine der beiden Ungleichungen erfüllen. Dann konstruiere man Folgen $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Z}$ mit

$$5^n \alpha_n + 7^n \beta_n = 1$$

und betrachte die Folge

$$x_n = 5^n \alpha_n z_n + 7^n \beta_n y_n.$$

(4 Punkte)