Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie SS 2007

Blatt 1 Abgabe bis Donnerstag 10.05.2007 um 14:00 Uhr

Aufgabe 7) Zeige, dass die Normabbildung $\mathfrak{N}$ von den gebrochenen Idealen eines Zahlkörpers K nach $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ die Eigenschaft hat:

$\mathfrak{N}((\alpha)) = |Norm(\alpha)|$ für $\alpha \in K^*$

mit der Normabbildung $Norm$ aus Aufgabe 6).

(3 Punkte)

Aufgabe 8) Sei $K/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe Γ.

(a) Zeige für $\alpha \in K$:

$$Norm(\alpha) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\alpha)$$

mit der Normabbildung aus Aufgabe 6).

(b) Sei $\mathfrak{a} \subset K$ ein gebrochenes Ideal. Zeige:

$\prod_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\mathfrak{a})$ ist ein Hauptideal, welches von $\mathfrak{N}(\alpha)$ erzeugt wird.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 9) Stelle in $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ die folgenden Ideale als Produkt von Primidealpotenzen dar:

$$(2), \quad (5), \quad (7), \quad (13).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 10) (a) Sei $R = \mathcal{O}_K$ für $K = \mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.

Zeige dass der Ring R mit der Abbildung

$$\nu : \mathcal{O}_K \to \mathbb{N},\ \alpha \mapsto |Norm(\alpha)|$$

euklidisch wird:

Zu $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ gibt es $q, r \in R$ mit

$$a = b \cdot q + r \quad \text{und} \quad \nu(r) < \nu(b).$$

(b) Zeige, dass jeder euklidische Ring ein Hauptidealring ist.

(4=2+2 Punkte)