Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie SS 2007

Blatt 1 Abgabe bis Donnerstag 03.05.2007 um 14:00 Uhr

Aufgabe 4) Im Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_K$ des Körpers $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ betrachten wir die Ideale

$$\mathfrak{a} = \left(2, \frac{1+\sqrt{-23}}{2}\right), \quad \mathfrak{b} = \left(3, \frac{1+\sqrt{-23}}{2}\right), \quad \mathfrak{c} = \left(13, 4+\sqrt{-23}\right).$$

Für welche $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ ist $\mathfrak{a}^a \cdot \mathfrak{b}^b \cdot \mathfrak{c}^c$ ein Hauptideal in K?

(4 Punkte)

Aufgabe 5) Für eine Primzahl $p > 2$ sei $L = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ ein Zerfällungskörper der Gleichung $x^p - 1 = 0$, wobei $\zeta_p \neq 1$ eine primitive p-te Einheitswurzel bezeichnet.

Bekanntlich ist $G = Gal(L/\mathbb{Q})$ zur zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ isomorph. Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie gibt es genau eine quadratische Körpererweiterung K mit $\mathbb{Q} \subset K \subset L$. Welche Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \zeta_p^i$ liegen in K? Bestimme mit Beweis ein quadratfreies $D \in \mathbb{Z}$ mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

(4 Punkte)

Aufgabe 6) (a) Für einen Zahlkörper K und $\alpha \in K$ bezeichne $Norm(\alpha) \in \mathbb{Q}$ die Determinante der $\mathbb{Q}$-linearen Abbildung $l_\alpha : K \to K, \quad x \mapsto x \cdot \alpha$.

(a) Zeige $Norm(\alpha \cdot \beta) = Norm(\alpha) \cdot Norm(\beta)$.

(b) Zeige, dass für $\alpha \in \mathcal{O}_K$ genau dann

$$\alpha \in \mathcal{O}_K^* = \{\beta \in \mathcal{O}_K | \exists \gamma \in \mathcal{O}_K \text{ mit } \beta \cdot \gamma = 1\}$$

gilt, wenn $Norm(\alpha) = \pm 1$ ist.

(c) Berechne

$$Norm(x + y\sqrt{D})$$

im Falle eines quadratischen Zahlkörpers, d.h. $x + y\sqrt{D} \in K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Wie hängen im Fall $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ($D \in \mathbb{Z}$ quadratfrei) die Einheiten $\mathcal{O}_K^*$ mit den ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ bzw. im Fall $D \equiv 1 \; mod \; 4$ der Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ zusammen?

Wie kann man im Fall $D \equiv 1 \; mod \; 4$ aus einer Lösung der Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ durch Ausnutzen der Gruppenstruktur in $\mathcal{O}_K^*$ eine Lösung der Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ gewinnen?

(d) Die Schlacht von Hastings am 14.10.1066

"Harolds Mannen standen nach alter Gewohnheit dichtgedrängt in 13 gleichgroßen Quadraten aufgestellt, und wehe dem Normannen, der es wagte, in eine solche Phalanx einbrechen zu wollen. ... Als aber Harold selbst auf dem Schlachtfeld erschien, formten die Sachsen ein einziges gewaltiges Quadrat mit ihrem König an der Spitze und stürmten mit den Schlachtrufen "Ut!", "Olicrosse!", "Godemite!" vorwärts. ...

Wie groß soll die Armee Harolds II. gewesen sein?

(7=1+2+2+2 Punkte)