Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie SS 2007

Blatt 13 Abgabe bis Donnerstag 19.07.2007 um 14:00 Uhr

Man bearbeite (Teil-)Aufgaben im Gesamtwert von maximal 15 Punkten.

Aufgabe 46) Sei $K/\mathbb{Q}_3$ ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - 3X + 1$.

Zeige: $N(K^*) = 3^{\mathbb{Z}} \cdot \{x \in \mathbb{Z}_3 \mid x \equiv \pm 1 \; mod \; 9\} \subset \mathbb{Q}_3^*$.

(3 Punkte)

Aufgabe 47) Sei $F = \mathbb{Q}(i)$, $\mathfrak{p} = (1+i)$ sowie $U_2^3 = \{x \in F_{\mathfrak{p}} \mid x - 1 \in \mathfrak{p}^3\}$.

(a) Zeige: U_2^3 ist Untergruppe von $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^*$ und es gilt $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^* = U_2^3 \times \iota(\mathcal{O}_F^*)$, wobei $\iota : F \to F_{\mathfrak{p}} = F \otimes \mathbb{Q}_2$ die kanonische Einbettung ist.

(b) Sei $\pi : \mathbb{I}_F \to \mathbb{I}_F/F^*$ die kanonische Projektion. Zeige: Es gibt genau einen Charakter $\chi : \mathbb{I}_F/F^* \to \mathbb{C}^*$, so dass für die Produktdarstellung der Komposition $\chi \circ \pi = \Pi_v \chi_v$ gilt:

$$\chi_{\mathfrak{q}}(\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{q}}}^*) = \{1\} \text{ für } \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}, \qquad \chi_{\mathfrak{p}}(U_2^3) = \{1\}, \qquad \chi_\infty(z) = \frac{z}{|z|}.$$

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 48) (a) Zeige, dass die Reihe

$$s = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \qquad \text{mit} \qquad a_m = \frac{1}{3m+1} - \frac{1}{3m+2}$$

konvergiert und dass sich der Grenzwert s in der Form $L(\chi, 1)$ mit einem Charakter $\chi : \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^* \to \{\pm 1\}$ darstellen lässt.

(b) Man schätze die Differenz

$$\Delta_n = s - \sum_{m=0}^{n-1} a_m - \frac{1}{9n}$$

ab und berechne damit die Differenz

$$s - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

bis auf eine maximalen Fehler 10^{-6}.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 49) Wir benutzen die Bezeichnungen der Aufgaben 32),33),34) und 37). Sei $p \neq 23$ eine Primzahl, die in dem Körper K zerfällt: $(p) = \mathfrak{p} \cdot \bar{\mathfrak{p}}$.

(a) Folgere aus dem Hauptsatz (Vorlesung vom 29.06.) die Aussage: "$F_{\mathfrak{p}} \in Gal(L/K)$ ist genau dann das neutrale Element, wenn $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal ist". Welche Implikation hat diese Aussage für das Auftreten der Fälle (a) und (b) in den Aufgaben 33) bzw. 34)?

(b) Zeige: hat die Gleichung $P(X) = X^3 - X + 1 = 0$ in $\mathbb{F}_p$ keine Lösung, so ergibt sich bei Polynomdivision von

$$(X^{p^2} - X^p) \cdot (X^{p^2} - X) \cdot (X^p - X) \qquad \text{durch} \qquad P(X) \quad \text{in } \mathbb{F}_p[X]$$

ein konstantes Polynom der Form r_p als Rest, wobei $r_p^2 = -23$ in $\mathbb{F}_p$ gilt.

(c) Zeige: hat man eine Darstellung der Form $8p = a^2 + 23b^2$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, so kann man nach Wahl von Vorzeichen $a \equiv b \; mod \; 4$ annehmen. Dann ist $s_p = a \cdot b^{-1} \in \mathbb{F}_p^*$ eine Restklasse mit $s_p^2 = -23$. Weiterhin liegen $\mathfrak{p} = (p, \frac{a-b\sqrt{-23}}{2})$ und das Ideal $\mathfrak{a} = (2, \frac{1+\sqrt{-23}}{2})$ in derselben Idealklasse.

(d) Folgere aus dem Hauptsatz unter der Voraussetzung von (c) die Aussage $F_{\mathfrak{p}} = F_{\mathfrak{a}}$ in $Gal(L/K)$ und schließe daraus, dass $r_p = s_p$ ist.

(e) Berechne r_p und s_p für die Primzahlen $3, 13, 29, 31, 41, 47, 71, 73$ und 127 ohne Benutzung des Hauptsatzes. (Computeralgebraprogramm für r_p benutzen!)

(11=2+2+2+3+2 Punkte)