Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie SS 2007

Blatt 12 Abgabe bis Donnerstag 12.07.2007 um 14:00 Uhr

Aufgabe 42) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit quadratfreiem $d \in \mathbb{Z}$ und $Gal(K/\mathbb{Q}) = \{id, \sigma\}$.

(a) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Gleichung $-1 = \alpha \cdot \sigma(\alpha)$ hat eine Lösung mit $\alpha \in K$;

(ii) Die Gleichung $d = x^2 + y^2$ besitzt eine Lösung mit $x, y \in \mathbb{Q}$;

(iii) d ist positiv und kein Primteiler p von d ist kongruent 3 modulo 4.

(b) Berechne $\dim_{\mathbb{F}_2} Cl(K)[2]$ für $d = 15, 21, 82, 105, 130$ und für $d = -105$.
Hinweis: vorherige Aufgaben, dabei 24)c) nicht vergessen!

(5=3+2 Punkte)

Lösung von 41)d): Ist $d > 0$ und die Gleichung $-1 = \alpha \cdot \sigma(\alpha)$ nicht lösbar für $\alpha \in K$, so gilt $\dim_{\mathbb{F}_2} Cl(K)[2] = v - 2$;

in allen anderen Fällen ist $\dim_{\mathbb{F}_2} Cl(K)[2] = v - 1$.

Aufgabe 43) Sei L/K eine unverzweigte Erweiterung von Zahlkörpern. K besitze nur komplexe Einbettungen.

(a) Konstruiere einen surjektiven Homomorphismus:

$$\pi : Cl(K) \to \mathbb{I}_K/(K^* \cdot N(\mathbb{I}_L)).$$

(b) Zeige, dass π für die Körper $K \subset L$ aus Aufgabe 32) ein Isomorphismus ist.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 44) Sei $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ mit einer primitiven p-ten Einheitswurzel ζ_p.

Zeige, dass $N(K^*) \subset \mathbb{Q}_p^*$ von der Form

$$N(K^*) = p^{\mathbb{Z}} \cdot U_p^1$$

ist, wobei $U_p^1 = \{x \in \mathbb{Z}_p \mid x \equiv 1 \ mod \ p\}$ die Gruppe der Einseinheiten ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 45) Für eine Primzahl p sei $f(x) = \Pi_v f_v(x) : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_\infty(x) = e^{-\pi x^2}$ sowie $f_l(x) = 1_{\mathbb{Z}_l}(x)$ für $l \neq p$ und schließlich

$$f_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Z}_p^* \\ 1-p & \text{für } x \in p \cdot \mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Z}_p \end{cases}$$

(a) Berechne die Zetafunktion bezüglich des trivialen Charakters $Z(f, 1, s)$ und zeige, dass diese in einer Umgebung von 1 holomorph ist.

(b) Was ist $Z(f, 1, 1)$?

(c) Zeige für $p = 2$

$$Z(f, 1, 1) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i} \right)$$

(4=2+1+1 Punkte)