Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

# Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie SS 2007

**Blatt 1 Abgabe bis Donnerstag 26.04.2007 um 14:00 Uhr**

**Aufgabe 1)** Zeige, dass die folgenden algebraischen Zahlen ganz algebraisch sind und bestimme das Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$: (Für $\alpha, \beta$ soll das bereits als Präsenzaufgabe in der Übung am 23.04. gelöst werden)

$$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \qquad \beta = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{6} - 1}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2} \qquad \omega = 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) = \zeta + \zeta^{-1}$$

mit $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{9}\right)$.

(4=2+2 Punkte)

**Aufgabe 2)** Sei $D \in \mathbb{Z}$ eine quadratfreie ganze Zahl mit $D \neq 0, 1$ sowie $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

(a) Zeige:

$$\mathcal{O}_K = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdot \frac{1+\sqrt{D}}{2} & \text{falls } D \equiv 1 \; mod \; 4 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdot \sqrt{D} & \text{falls } D \equiv 2, 3 \; mod \; 4 \end{cases}$$

(b) Zeige:

$$D_{K/\mathbb{Q}} = \begin{cases} D & \text{falls } D \equiv 1 \; mod \; 4 \\ 4 \cdot D & \text{falls } D \equiv 2, 3 \; mod \; 4. \end{cases}$$

(6=3+3 Punkte)

**Aufgabe 3)** Wir betrachten im Ring $\mathcal{O} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdot \sqrt{-5} \subset K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ die Ideale

$$\mathfrak{p} = (2, 1 + \sqrt{-5}), \qquad \mathfrak{q} = (3, 1 + \sqrt{-5}), \qquad \overline{\mathfrak{q}} = (3, 1 - \sqrt{-5}).$$

(a) Zeige, dass $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und $\overline{\mathfrak{q}}$ maximale Ideale, aber keine Hauptideale in $\mathcal{O}$ sind.

(b) Berechne die Produktideale $\mathfrak{p}^2, \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}, \mathfrak{p} \cdot \overline{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}^2, \mathfrak{q} \cdot \overline{\mathfrak{q}}$ sowie $\overline{\mathfrak{q}}^2$ und zeige, dass diese Hauptideale sind. Gib auch jeweils ein erzeugendes Element an.

(c) Berechne das gebrochene Ideal $\mathfrak{p}^{-1} \subset K$ und zeige $\mathcal{O} \neq \mathfrak{p}^{-1}$.

(6=2+3+1 Punkte)