Mathematisches Institut der Uni Heidelberg Dr. Uwe Weselmann

Übungen "Algebraische Topologie" SS 2009 Blatt 9

Abgabe am Montag 08.06.09 bis 16:15 Uhr in der Übung

Aufgabe 28) (a) Sei X lokal wegzusammenhängend. Zeige, dass jede Wegzusammenhangskomponente von X offen und abgeschlossen in X ist. Folgere daraus, dass jede Zusammenhangskompenente wegzusammenhängend ist.

(b) Sei $\varphi : X \to B$ eine surjektive Überlagerung. Zeige, dass X genau dann lokal wegzusammenhängend ist, wenn B lokal wegzusammenhängend ist.

(c) In X habe jeder Punkt eine zusammenziehbare offene Umgebung. Zeige, dass X lokal wegzusammenhängend ist.

(5=2+1+2 Punkte)

Aufgabe 29) Sei $B = \bigcup_{\in \mathbb{N}} K_k$ mit

$$K_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x - \frac{1}{k} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{k^2} \right\}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n = S_n \cup \bigcup_{m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}, k \neq n} K_{m,k}$ mit

$$S_n = \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos(2\pi z)}{n}, \frac{\sin(2\pi z)}{n}, z \right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$K_{m,k} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = m, \left(x - \frac{1}{k} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{k^2} \right\}.$$

Zeige, dass die von der Projektion $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ induzierte Abbildung $\varphi_n : X_n \to B$ eine Überlagerung ist und dass X_n wegzusammenhängend ist. Was ist $\varphi^{-1}(b_0)$ mit $b_0 = (0, 0)$?

Folgere daraus, dass es keine offene Umgebung U von b_0 gibt, so dass die Abbildung $\pi_1(U, b_0) \to \pi_1(B, b_0)$ trivial ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 30) Seien $\varphi_1 : X_1 \to B$ und $\varphi_2 : X \to B$ Überlagerungen, wobei B, X_1 und X_2 wegzusammenhängend seien. Sei $\varphi_1(x_1) = b_0 = \varphi_2(x_2)$. Betrachte das Faserprodukt $X = X_1 \times_B X_2$ mit der Überlagerung $\varphi : X \to B$ und dem Punkt $x_0 = (x_1, x_2) \in X$.

(a) Zeige: $\varphi^{-1}(b_0) = \varphi_1^{-1}(b_0) \times \varphi_2^{-1}(b_0)$ und $\pi_1(B, b_0)$ operiert darauf diagonal.

(b) Zeige: $\varphi_\#(\pi_1(X, x_0)) = \varphi_{1\#}(\pi_1(X_1, x_1)) \cap \varphi_{2\#}(\pi_1(X_2, x_2))$.

(c) Zeige: X ist genau dann wegzusammenhängend, wenn die Abbildung

$$\mu : \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2) \to \pi_1(B, b_0), \quad (g_1, g_2) \to \varphi_{1\#}(g_1) \cdot \varphi_{2\#}(g_2)$$

surjektiv ist.

(4=1+1+2 Punkte)

Aufgabe 31) Zeige: Ist $\varphi : X \to B = S^1 \times S^1$ eine Überlagerung und X wegzusammenhängend, so ist X zu einem der Räume $\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times S^1, S^1 \times S^1$ homöomorph.

(3 Punkte)