Mathematisches Institut der Uni Heidelberg Dr. Uwe Weselmann

Übungen "Algebraische Topologie" SS 2009 Blatt 8

Abgabe am Dienstag 02.06.09 bis 11:15 Uhr in der Vorlesung

Aufgabe 25) Sei $\zeta_a = \{z \in S^1 | z^a = 1\}$ die diskrete Menge der a-ten Einheitswurzeln. Mit $\phi_2 = p_n : X_2 = S^1 \to S^1, z \mapsto z^n$ und einer Überlagerung $\phi_1 : X_1 \to S^1$ bilden wir das Faserprodukt $X = X_1 \times_{S^1} X_2$. Zeige, dass X jeweils zu einem Raum der Form $X_1 \times \zeta_a$ homöomorph ist, wobei

(a) $X_1 = \mathbb{R}, \quad \phi_1 = \exp$;

(b) $X_1 = S^1, \quad \phi_1 = p_{30}$ und $\quad \phi_2 = p_{18}$.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 26) (a) Zeige, dass die komplexe Exponentialfunktion

$$e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, z \mapsto e^z$$

eine Überlagerung definiert.

(b) Zeige, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $m = ad - bc \neq 0$ die Abbildung

$$\phi : X = S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1, \qquad \phi(x, y) = (x^a y^b, x^c y^d)$$

eine $|m|$-blättrige Überlagerung ist.

(3=1+2 Punkte)

Aufgabe 27) Sei $X = S^1 \vee S^1 \vee \ldots \vee S^1$ (n-Faktoren) und $\gamma_i : S^1 \to X$ der durch die Identifizierung mit der i-ten Komponente definierte Weg. Zeige, dass für die folgenden Wege $\gamma : S^1 \to X$ der Abbildungskegel $Y = C(\gamma)$ in (a),(b) und (c) jeweils eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit (Fläche) ist, in (d) jedoch nicht: (Ein kompakter topologische Raum heißt n-dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn jeder Punkt eine zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphe offene Umgebung besitzt.)

(a) $n = 2g$ und $\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3\gamma_4\gamma_3^{-1}\gamma_4^{-1} \ldots \gamma_{2g-1}\gamma_{2g}\gamma_{2g-1}^{-1}\gamma_{2g}^{-1}$. (Diese Flächen heißen F_g.)

(b) $\gamma = \gamma_1\gamma_1\gamma_2\gamma_2 \ldots \gamma_n\gamma_n$. (Diese Flächen heißen N_n.)

(c) $\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2$.

(d) $\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_1\gamma_2$.

Ist die in (c) definierte Fläche Y_c zu einer der in (a) oder (b) definierten Flächen homöomorph?

(8 Punkte)