Mathematisches Institut der Uni Heidelberg Dr. Uwe Weselmann

Übungen "Algebraische Topologie" SS 2009 Blatt 7

Abgabe am Montag 25.05.09 bis 16:15 Uhr in der Übung

Korrektur Aufgabe 19): Es wird noch vorausgesetzt, dass X wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 21) Seien $i_1 : G_0 \to G_1$ und $i_2 : G_0 \to G_2$ Homomorphismen von Gruppen, wobei i_1 surjektiv sei.

Zeige, dass $G_1 *_{G_0} G_2$ zu G_2/N isomorph ist, wobei N der von $i_2(\ker i_1)$ erzeugte Normalteiler in G_2 ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 22) (a) Berechne $\pi_1(X, x_3)$ mit $X = A_2 \cup A_4$ und $x_3 = (3, 0, 0)$, wobei für $r \geq 1$:

$$A_r = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\sqrt{x^2 + y^2} - r)^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

(b) Was ist $\pi_1(A_1, x_0)$ mit $x_0 = (0, 0, 0)$?

(5=3+2 Punkte)

Aufgabe 23) Für $n \geq 2$ sei $i : \mathbb{R}^n \hookrightarrow S^n$ die Einbettung in die Einpunktkompaktifizierung (Aufgabe 6(d)). Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\mathbb{R}^n - K$ wegzusammenhängend. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n - K$.

Zeige, dass $i_\# : \pi_1(\mathbb{R}^n - K, x_0) \to \pi_1(S^n - i(K), i(x_0))$ für $n = 2$ surjektiv und für $n \geq 3$ ein Isomorphismus ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 24) Die Gruppoide G_0, G_1, G_2, G haben jeweils die beiden Objekte A und B.

Es gelte in G_0, G_1, G_2: $Hom(A, A) = \{id_A\}, Hom(B, B) = \{id_B\}$. Weiterhin sei in G_0: $Hom(A, B) = Hom(B, A) = \emptyset$ sowie für $i = 1, 2$ in G_i : $Hom(A, B) = \{\phi_i\}$, $Hom(B, A) = \{\psi_i\}$.

In G gelte $Hom(A,A) = \mathbb{Z} = Hom(B,B)$ und $Hom(A,B) = \mathbb{Z} + \frac{1}{2} = Hom(B,A)$ mit der Addition als Verknüpfung von Morphismen.

Es gibt in der Kategorie der Gruppoide Morphismen (=Funktoren zwischen Gruppoiden), die jeweils die Identität auf den Objekten induzieren:

$$i_1 : G_0 \to G_1, \qquad i_2 : G_0 \to G_2,$$

$$j_1 : G_1 \to G \text{ mit } j_1(\phi_1) = \frac{1}{2}, \quad j_2 : G_2 \to G \text{ mit } j_1(\phi_2) = -\frac{1}{2}.$$

Zeige, dass in der Kategorie der Gruppoide (G, j_1, j_2) ein Pushout von $(G_0, G_1, G_2, i_1, i_2)$ ist.

(4 Punkte)