# Übungen "Algebraische Topologie" SS 2009 Blatt 6

**Abgabe am Montag 18.05.09 bis 16:15 Uhr in der Übung**

**Aufgabe 18)** (a) Zeige: die Abbildung $p_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto z^n$ ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn $n = 1$ oder $n = -1$ gilt.

(b) Bestimme einen Pushout für $X_0 = X_1 = X_2 = \mathbb{C}^*$ und $i_1 = p_4$, $i_2 = p_6$ in der Kategorie der topologischen Räume.

(5=2+3 Punkte)

**Aufgabe 19)** Für einen wegzusammenhängenden topologischen Raum $X$ und $x_0 \in X$ sei $\pi_1(X, x_0) = S_4$ die symmetrische Gruppe von 4 Elementen. Wie viele Homotopieklassen von Abbildungen $\phi : S^1 \to X$ gibt es?

(3 Punkte)

**Aufgabe 20)** (Torusknoten). Für teilerfremde $p, q \in \mathbb{Z}$ gibt es bekanntlich $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $pr + sq = 1$. Sei

$$X = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, |z|^2 + |w|^2 = 1\right\} \cong S^3,$$

$$T = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,z, \frac{1}{\sqrt{2}}w\right) \in X \,\middle|\, |z| = |w| = 1 \right\} \cong S^1 \times S^1,$$

$$K = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y^p, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y^q\right) \in X \,\middle|\, y \in S^1 \right\} \cong S^1,$$

$$\tilde{K} = \left\{ \left(x \cdot y^p, \sqrt{1-x^2} \cdot y^q\right) \in X \,\middle|\, \frac{3}{5} < x < \frac{4}{5},\ y \in S^1 \right\},$$

$$X_1 = \left\{(z,w) \in X \,\middle|\, |z| < \frac{4}{5}\right\}, \qquad X_2 = \left\{(z,w) \in X \,\middle|\, |w| < \frac{4}{5}\right\}.$$

(a) Zeige, dass

$$\gamma : T \to S^1 \times S^1, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,z, \frac{1}{\sqrt{2}}w\right) \mapsto (z^r \cdot w^s, w^p \cdot z^{-q})$$

ein Homöomorphismus ist mit $\gamma(T - K) = S^1 \times (S^1 - \{1\})$.

(b) Zeige, dass die folgenden Abbildungen Homotopieäquivalenzen sind:

$$\alpha_1 : X_1 \to S^1, (z,w) \mapsto \frac{w}{|w|}, \qquad \alpha_2 : X_2 \to S^1, (z,w) \mapsto \frac{z}{|z|}$$

$$\beta : (T - K) \to S^1, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, z, \frac{1}{\sqrt{2}} w\right) \mapsto z^r \cdot w^s.$$

(c) Zeige, dass die folgenden Inklusionen Homotopieäquivalenzen sind:

$$j_1 : X - \tilde{K} \hookrightarrow X - K, \qquad j_2 : T \hookrightarrow X_1 \cap X_2, \qquad j_3 : T - K \hookrightarrow (X_1 \cap X_2) - \tilde{K},$$

$$j_4 : X_1 - \tilde{K} \hookrightarrow X_1, \qquad j_5 : X_2 - \tilde{K} \hookrightarrow X_2.$$

(d) Die Inklusionen $i_1 : (X_1 \cap X_2) - \tilde{K} \hookrightarrow X_1 - \tilde{K}$ und $i_2 : (X_1 \cap X_2) - \tilde{K} \hookrightarrow X_2 - \tilde{K}$ induzieren Homomorphismen zwischen den Fundamentalgruppen, welche wegen der in (b) und (c) genannten Homotopieäquivalenzen jeweils zu $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ isomoph sind. Beschreibe $(i_1)_\# : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ und $(i_2)_\# : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

(8=2+2+3+1 Punkte)

Bemerkung: $K$ heißt Torusknoten in $X \cong S^3$. Mit Hilfe des Satzes von Seifert und von Kampen und den obigen Überlegungen kann man die Fundamentalgruppe $\pi_1(X - K, x_0)$ des Komplements berechnen.