Mathematisches Institut der Uni Heidelberg Dr. Uwe Weselmann

Übungen "Algebraische Topologie" SS 2009 Blatt 5

Abgabe am Montag 11.05.09 bis 16:15 Uhr in der Übung

Aufgabe 15) (a) Zeige, dass die folgenden topologischen Räume homöomorph sind:

$$\begin{aligned} X_1 &= S^1 \times S^1 \\ X_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 = 1\} \\ X_3 &= \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{R}^2/\sim \ \text{ mit } v \sim w \Leftrightarrow v - w \in \mathbb{Z}^2 \\ X_4 &= \mathbb{C}^*/\sim \ \text{ mit } z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2 \cdot 2^n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(b) Zeige, dass der folgende Raum zu X_2 homotopieäquivalent ist:

$$X_5 = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\} - \{(2\cos\phi, 2\sin\phi, 0) | \phi \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Man beschreibe für alle X_i jeweils zwei Erzeugende der Fundamentalgruppe $\pi_1(X_i, x_i)$ für $x_1 = (1,1), x_2 = (1,0,0) = x_5, x_3 = \overline{(0,0)}, x_4 = \overline{1}$.

(6=3+1+2 Punkte)

Aufgabe 16) Sei $f : X \to Y$ stetig, $g : Y \hookrightarrow C(f)$ die Einbettung von Y in den Abbildungskegel.

(a) Zeige, dass der Abbildungskegel $C(g)$ zu dem Quotientenraum

$$Z = ((X \times I) \cup (Y \times I)) / \sim$$

mit der von den Relationen $(y_1, 0) \sim (y_2, 0), (x_1, 0) \sim (x_2, 0), (x, 1) \sim (f(x), 1)$ erzeugten Äquivalenzrelation $\sim$ homöomorph ist.

(b) Zeige, dass die folgenden Abbildungen eine Homotopieäquivalenz zwischen Z und der Einhängung $S(X)$ induzieren :

$$\phi : Z \to S(X), \qquad \begin{cases} \overline{(x,s)} \mapsto \overline{(x,s)} \\ \overline{(y,t)} \mapsto \overline{(x,1)} \end{cases}$$

$$\psi : S(X) \to Z, \qquad \overline{(x,s)} \mapsto \begin{cases} \overline{(x,2s)} & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \overline{(f(x),2-2s)} & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Man zeige auch, dass diese Abbildungen wohldefiniert sind. (Es ist jeweils $x \in X, y \in Y$ und $s \in I = [0,1]$.)

(6=1+5 Punkte)

Aufgabe 17) Zeige: jede stetige Abbildung $f : S^1 \to S^1$ mit $deg(f) \neq 1$ hat einen Fixpunkt.

(3 Punkte)