Übungen "Algebraische Topologie" SS 2009 Blatt 4

Abgabe am Montag 04.05.09 bis 16:15 Uhr in der Übung

Aufgabe 12) Für $n \geq 1$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ sei

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0$$

eine Polynomfunktion. Sei $\eta : \mathbb{C}^* \to S^1, z \mapsto \frac{z}{|z|}$.

(a) Zeige: Für $R \in \mathbb{R}$ mit $R \geq 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|$ ist die Abbildung $\phi_R : S^1 \to S^1, z \mapsto \eta(f(R \cdot z))$ wohldefiniert, zur Abbildung $z \mapsto z^n$ homotop und hat den Abbildungsgrad n.

(b) Bestimme den Abbildungsgrad von ϕ_2 für $f(z) = z^4 - 10z^2 + 9$.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 13) Sei $X = I \times I/\sim$ mit der Relation $(s, 0) \sim (1 - s, 1)$ (Möbiusband). Zeige, dass X zum Abbildungszylinder $Z(q)$ der Abbildung $q : S^1 \to S^1, z \mapsto z^2$ homöomorph ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 14) Für $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ sei

$$X^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \mid |x_0|^2 + \ldots + |x_n|^2 = 1\}.$$

Sei $\pi_n : X^n \to \mathbb{P}^n(K) = X^n/\sim$ die Projektion auf den Quotientenraum bezüglich der Äquivalenzrelation $x \sim \tilde{x} \Leftrightarrow$ es gibt $\lambda \in K$ mit $\tilde{x} = \lambda \cdot x$ und $|\lambda| = 1$. $\mathbb{P}^n(K)$ heißt n-dimensionaler projektiver Raum über K.

(a) Zeige, dass es einen Homöomorphismus ϕ zwischen dem Abbildungskegel $C(\pi_n)$ und $\mathbb{P}^{n+1}(K)$ gibt, der jeweils die Klasse von $((x_0, \ldots, x_n), s) \in X^n \times I$ auf die Klasse von $(s \cdot x_0, \ldots, s \cdot x_n, \sqrt{1 - s^2})$ in $X^{n+1}/\sim$ abbildet.

(b) Zeige, dass $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ zu S^1 und $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ zu S^2 homöomorph ist.

(6=4+2 Punkte)