Mathematisches Institut der Uni Heidelberg Dr. Uwe Weselmann

Übungen "Algebraische Topologie" SS 2009 Blatt 2

Abgabe am Montag 20.04.09 in der Übung um 16:15 Uhr

Aufgabe 5) Seien X_1, X_2 topologische Räume und $f_1 : X_1 \to Y_1$ sowie $f_2 : X_2 \to Y_2$ Abbildungen nach zwei Mengen. Zeige: Auf $Y = Y_1 \times Y_2$ ist Finaltopologie bezüglich der Abbildung

$$f = f_1 \times f_2 : \quad X = X_1 \times X_2 \to Y, \qquad (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

(wobei X mit der Produkttopologie versehen wird) feiner als die Produkttopologie der beiden Finaltopologien auf Y_1 und Y_2 (bezüglich f_1 bzw. f_2).

Man gebe auch ein Beispiel an, in dem diese beiden Topologien nicht übereinstimmen.

(3 Punkte)

Aufgabe 6) Für einen Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{O})$ sei $\bar{X} = X \cup \{\infty\}$ die disjunkte Vereinigung mit einer einelementigen Menge. Für $U \subset \bar{X}$ sei $U \in \bar{\mathcal{O}}$ genau dann, wenn entweder $\infty \notin U$ und $U \in \mathcal{O}$ oder wenn $\infty \in U$ und $\bar{X} - U$ eine quasikompakte Teilmenge von X ist. Zeige:

a) $\bar{\mathcal{O}}$ ist eine Topologie auf $\bar{X}$. (Das Paar $(\bar{X}, \bar{O})$ heißt **Einpunktkompaktifizierung** von $(X, \mathcal{O})$.)

b) $\bar{X}$ ist bezüglich dieser Topologie quasikompakt.

c) $\bar{X}$ ist genau dann hausdorffsch, wenn X lokalkompakt ist.

d) Die Einpunktkompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$ ist zur S^n homöomorph.

(6 Punkte)

Aufgabe 7) Sei $I = [0, 1]$ und

$$R = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \right) \middle| \, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \Delta_I \ \subset \ I \times I.$$

Zeige, dass R in $I \times I$ abgeschlossen ist. Bestimme die von R erzeugte Äquivalenzrelation $\tilde{R}$. Zeige, dass $\tilde{R}$ in $I \times I$ nicht abgeschlossen ist und gib zwei Elemente im Quotienten $I/\tilde{R}$ an, die keine disjunkten Umgebungen besitzen.

(3 Punkte)

Aufgabe 8) Für $L = \mathbb{R}$ oder $L = \mathbb{C}$ wird die Gruppe

$$G = SL_2(L) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in L, ad - bc = 1 \right\}$$

mit der Unterraumtopologie des L^4 versehen, ebenso ihre Untergruppen

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in L, a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\} \qquad \text{und}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R}, b \in L, a > 0 \right\}$$

(Dabei ist $\bar{a}$ die zu a komplex konjugiert Zahl im Fall $L = \mathbb{C}$ und $\bar{a} = a$ im Fall $L = \mathbb{R}$.)

Zeige, dass der Übergang zum Inversen $i : G \to G, g \mapsto g^{-1}$ und die Multiplikation $m : G \times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ stetige Abbildungen sind.

Zeige weiterhin, dass m einen Homöomorphismus $m : B \times K \to G$ induziert.

(4 Punkte)