

**Übungen "Algebraische Topologie" SS 2009 Blatt 2****Abgabe am Montag 20.04.09 in der Übung um 16:15 Uhr**

**Aufgabe 5)** Seien  $X_1, X_2$  topologische Räume und  $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$  sowie  $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$  Abbildungen nach zwei Mengen. Zeige: Auf  $Y = Y_1 \times Y_2$  ist Finaltopologie bezüglich der Abbildung

$$f = f_1 \times f_2 : X = X_1 \times X_2 \rightarrow Y, \quad (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

(wobei  $X$  mit der Produkttopologie versehen wird) feiner als die Produkttopologie der beiden Finaltopologien auf  $Y_1$  und  $Y_2$  (bezüglich  $f_1$  bzw.  $f_2$ ).

Man gebe auch ein Beispiel an, in dem diese beiden Topologien nicht übereinstimmen.

(3 Punkte)

**Aufgabe 6)** Für einen Hausdorff-Raum  $(X, \mathcal{O})$  sei  $\bar{X} = X \cup \{\infty\}$  die disjunkte Vereinigung mit einer einelementigen Menge. Für  $U \subset \bar{X}$  sei  $U \in \bar{\mathcal{O}}$  genau dann, wenn entweder  $\infty \notin U$  und  $U \in \mathcal{O}$  oder wenn  $\infty \in U$  und  $\bar{X} - U$  eine quasikompakte Teilmenge von  $X$  ist. Zeige:

- $\bar{\mathcal{O}}$  ist eine Topologie auf  $\bar{X}$ . (Das Paar  $(\bar{X}, \bar{\mathcal{O}})$  heißt **Einpunkt kompaktifizierung** von  $(X, \mathcal{O})$ .)
- $\bar{X}$  ist bezüglich dieser Topologie quasikompakt.
- $\bar{X}$  ist genau dann hausdorffsch, wenn  $X$  lokalkompakt ist.
- Die Einpunkt kompaktifizierung des  $\mathbb{R}^n$  ist zur  $S^n$  homöomorph.

(6 Punkte)

**Aufgabe 7)** Sei  $I = [0, 1]$  und

$$R = \left\{ \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \Delta_I \subset I \times I.$$

Zeige, dass  $R$  in  $I \times I$  abgeschlossen ist. Bestimme die von  $R$  erzeugte Äquivalenzrelation  $\tilde{R}$ . Zeige, dass  $\tilde{R}$  in  $I \times I$  nicht abgeschlossen ist und gib zwei Elemente im Quotienten  $I/\tilde{R}$  an, die keine disjunkten Umgebungen besitzen.

(3 Punkte)

**Aufgabe 8)** Für  $L = \mathbb{R}$  oder  $L = \mathbb{C}$  wird die Gruppe

$$G = SL_2(L) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in L, ad - bc = 1 \right\}$$

mit der Unterraumtopologie des  $L^4$  versehen, ebenso ihre Untergruppen

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \middle| a, b \in L, a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\} \quad \text{und}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, b \in L, a > 0 \right\}$$

(Dabei ist  $\bar{a}$  die zu  $a$  komplex konjugiert Zahl im Fall  $L = \mathbb{C}$  und  $\bar{a} = a$  im Fall  $L = \mathbb{R}$ .)

Zeige, dass der Übergang zum Inversen  $i : G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$  und die Multiplikation  $m : G \times G \rightarrow G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$  stetige Abbildungen sind.

Zeige weiterhin, dass  $m$  einen Homöomorphismus  $m : B \times K \rightarrow G$  induziert.

(4 Punkte)