Mathematisches Institut der Uni Heidelberg Dr. Uwe Weselmann

Übungen Algebraische Topologie SS 2009 Blatt 12

Abgabe am Montag 29.06.09 bis 16:15 Uhr in der Übung

Aufgabe 36) In einem Kettenkomplex $(K_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ gebe es direkte Summenzerlegungen

$$K_2 = A_2 \oplus C_2,\ K_1 = A_1 \oplus C_1.$$

Wir setzen $A_i = K_i$ für $i \neq 1, 2$. Die Randabbildungen schreiben wir in der Form

$$\partial_3(a_3) = (d_3(a_3), \phi_3(a_3)), \quad \partial_2(a_2, c_2) = (d_2(a_2) + \psi_2(c_2), \phi_2(a_2) + \eta(c_2)),$$

$$\partial_1(a_1, c_1) = d_1(a_1) + \psi_1(c_1)$$

mit geeigneten Homomorphismen $d_i : A_i \to A_{i-1}$ $(i = 1, 2, 3)$, $\phi_i : A_i \to C_{i-1}$ $(i = 2, 3)$, $\psi_i : C_i \to A_{i-1}$ $(i = 1, 2)$ und einem **Isomorphismus** $\eta : C_2 \to C_1$.

(a) Berechne ϕ_3 und ψ_1 aus den Abbildungen $d_3, d_1, \phi_2, \psi_2, \eta^{-1}$.

(b) Wir setzen $\tilde{\partial}_i = \partial_i$ für $i \neq 1, 2, 3$, $\tilde{\partial}_i = d_i$ für $i = 1, 3$ und

$$\tilde{\partial}_2 = d_2 - \psi_2 \circ \eta^{-1} \circ \phi_2.$$

Zeige, dass $(A_q, \tilde{\partial}_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ ein Kettenkomplex ist.

(c) Die Abbildungen $\pi_q : K_q \to A_q$ seien definiert durch $\pi_q = id$ für $i \neq 1, 2$, $\pi_1(a_1, c_1) = a_1 - \psi_2(\eta^{-1}(c_1))$, $\pi_2(a_2, c_2) = a_2$. Zeige, dass $(\pi_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenabbildung ist.

(d) Die Abbildungen $\tau_q : A_q \to K_q$ seien definiert durch $\tau_q = id$ für $i \neq 1, 2$, $\tau_1(a_1) = (a_1, 0)$, $\tau_2(a_2) = (a_2, -\eta^{-1}(\phi_2(a_2))$. Zeige, dass $(\tau_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenabbildung ist.

(e) Zeige, dass die Kettenabbildungen $(\pi_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ und $(\tau_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ zueinander invers in der Kategorie HoKett sind.

(6=1+1+1+1+2 Punkte)

Aufgabe 37) Für eine Kettenabbildung $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}} : (A_i, \partial_i) \to (B_i, \tilde{\partial}_i)$ definieren wir den Abbildungskegel $C(f)$ durch $K_i = A_{i-1} \oplus B_i$ mit den Randabbildungen

$$d_i(a_{i-1}, b_i) = (\partial_{i-1}(a_{i-1}), \tilde{\partial}_i(b_i) + (-1)^i f_{i-1}(a_{i-1})).$$

(a) Zeige, dass $(K_i, d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ein Kettenkomplex ist.

(b) Seien $f_i : A_i \hookrightarrow B_i$ Inklusionen. Dann ist auch $C_i = B_i/A_i$ ein Kettenkomplex mit den induzierten Randabbildungen $\bar{\partial}_i : C_i \to C_{i-1}$.

Zeige, dass durch

$$\pi_i : K_i \to C_i, (a_{i-1}, b_i) \mapsto \text{ Klasse von } b_i$$

eine Kettenabbildung definiert wird, die ein Quasiisomorphismus von Kettenkomplexen ist.

(c) Zeige, dass eine beliebige Kettenabbildung $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ genau dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn der Abbildungskegel $C(f)$ zum Nullkomplex homotopieäquivalent ist.

(8=1+3+4 Punkte)