Mathematisches Institut der Uni Heidelberg — Dr. Uwe Weselmann

Übungen Algebraische Topologie SS 2009 — Blatt 11

Abgabe am Montag 22.06.09 bis 16:15 Uhr in der Übung

Aufgabe 34) (a) Zeige: Ist $\phi : X \to B$ eine surjektive Überlagerung, so ist $\phi_\cdot : S_q(X) \to S_q(B)$ für alle $q \geq 0$ surjektiv.

(b) Für eine Kette $\gamma = \sum n_\sigma \sigma \in S_1(\mathbb{R})$ setzen wir

$$\Phi(\gamma) = \sum n_\sigma(\sigma(e_1) - \sigma(e_0)).$$

Zeige, dass $\Phi(\gamma) = 0$ für $\gamma \in B_1(\mathbb{R})$ gilt.

(c) Sei $\rho = \phi_\cdot(\gamma) \in S_1(S^1)$ Bild von $\gamma \in S_1(\mathbb{R})$ mit der Überlagerung $\phi = exp : \mathbb{R} \to S^1, r \mapsto e^{2\pi ir}$. Zeige, dass $\Phi(\gamma)$ nur von ρ abhängt und dass $\Phi(\gamma) \in \mathbb{Z}$ gilt, falls ρ ein Zykel ist.

(d) Zeige, dass genau dann $\Phi(\gamma) = 0$ gilt, wenn $\rho \in B_1(S^1)$ ist, und folgere daraus, dass $H_1(S^1)$ zu $\mathbb{Z}$ isomorph ist.

(7=1+1+2+3 Punkte)

Aufgabe 35) Seien X, Y topologische Räume. Für singuläre 1-Simplizes $\phi : I = \Delta_1 \to X$ und $\tau : I = \Delta_1 \to Y$ sei $(\phi, \tau) : \Delta_1 \times I \to X \times Y, (r, s) \mapsto (\phi(r), \tau(s))$ und $\phi \times \tau = (\phi, \tau) \circ \rho_{0,1} - (\phi, \tau) \circ \rho_{1,1} \in S_2(X \times Y)$ mit den Simplizes $\rho_{\nu,1} : \Delta_2 \to \Delta_1 \times I$ aus der Vorlesung. Für $\gamma = \sum m_\phi \phi \in S_1(X)$ und $\beta = \sum n_\tau \tau \in S_1(Y)$ setzen wir:

$$\gamma \times \beta = \sum_{\phi,\tau} m_\phi n_\tau \cdot \phi \times \tau \in S_2(X \times Y).$$

(a) Zeige, dass $\gamma \times \beta \in Z_2(X \times Y)$ gilt, falls γ und β Zykeln sind.

(b) Zeige, dass $\gamma \times \beta \in B_2(X \times Y)$ gilt, falls $\gamma \in Z_1(X)$ und $\beta \in B_1(Y)$ gilt oder falls $\gamma \in B_1(X)$ und $\beta \in Z_1(Y)$ ist.

(c) Folgere daraus die Existenz einer bilinearen Abbildung

$$b : H_1(X) \times H_1(Y) \to H_2(X \times Y).$$

(d) Sei $\pi : X \times Y \to X$ die Projektion. Zeige: $\pi_* : H_2(X \times Y) \to H_2(X)$ ist surjektiv. Es gilt aber $\pi_* \circ b = 0$.

(8= 2+3+1+2 Punkte)