Mathematisches Institut der Uni Heidelberg Dr. Uwe Weselmann

Übungen Algebraische Topologie SS 2009 Blatt 10

Abgabe am Montag 15.06.09 bis 16:15 Uhr in der Übung

Aufgabe 31) Sei (G, m, i, e) eine topologische Gruppe, d.h. ein topologischer Raum G zusammen mit stetigen Abbildungen

$$m : G \times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \quad \text{und} \quad i : G \to G, g \mapsto g^{-1},$$

so dass die Gruppenaxiome mit neutralem Element $e \in G$ erfüllt sind. Sei G hinreichend zusammenhängend, $\phi : \tilde{G} \to G$ eine universelle Überlagerung und $\tilde{e} \in \phi^{-1}(e)$.

(a) Zeige, dass es genau eine Struktur einer topologischen Gruppe $(\tilde{G}, \tilde{m}, \tilde{i}, \tilde{e})$ gibt, so dass $\phi \circ \tilde{i} = i \circ \phi$ und $\phi(\tilde{m}(g_1, g_2)) = m(\phi(g_1), \phi(g_2))$ für $g_1, g_2 \in \tilde{G}$ gilt.

(b) Bestimme die Fundamentalgruppe $G = \pi_1(SL_2(\mathbb{R}), e)$.

(5=4+1 Punkte)

Aufgabe 32) Die Menge $G = \mathbb{Z}^2$ wird mit der Verknüpfung

$$(m_1, n_1) \cdot (m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + (-1)^{m_1} n_2)$$

eine Gruppe.

(a) Zeige: durch

$$(m, n) \cdot (x, y) = (x + m, (-1)^m y + n)$$

wird eine Operation der Gruppe G auf $X = \mathbb{R}^2$ definiert, und diese Operation ist eigentlich diskontinuierlich.

(b) Sei $B = G \backslash \mathbb{R}^2$, $\phi : X \to B$ die Projektion. $\phi_i : X_i \to B$ seien die zu folgenden charakteristischen Untergruppen $H_i = (\phi_i)_\#(\pi_1(X_i, x_i))$ von $G = \pi_1(B, b_0)$ gehörenden Überlagerungen:

$$H_1 = \{(m, n) \in G \mid m \text{ ist Vielfaches von } 2\}$$

$$H_2 = \{(m,n) \in G \mid n \text{ ist Vielfaches von } 2\}$$
$$H_3 = \{(m,n) \in G \mid m \text{ ist Vielfaches von } 3\}$$
$$H_4 = \{(m,n) \in G \mid n \text{ ist Vielfaches von } 3\}$$

Dabei ist x_i bzw. b_0 jeweils die Klasse von $(0,0)$. Zeige, dass die Räume X_i entweder zu B oder zu $S^1 \times S^1$ homöomorph sind.

Bestimme jeweils die Decktransformationsgruppe $Deck(\phi_i : X_i \to B)$

(6=2+4 Punkte)

Aufgabe 30) Seien $U \subset A \subset X$ Unterräume des topologischen Raumes X. Es gebe eine stetige Abbildung $f : X \to I = [0,1]$ mit $f(u) = 0$ für $u \in U$ und $f(x) = 1$ für $x \in X - A$.

Seien $i : A \hookrightarrow X$ und $j : A - U \hookrightarrow X - U$ die kanonischen Inklusionen. Zeige, dass die kanonische Abbildung zwischen den Abbildungskegeln $\eta : C(j) \to C(i)$ eine Homotopieäquivalenz ist.

(4 Punkte)