Überlagerungen

Vorbemerkung. Ein top. Raum X sei die *disjunkte* Vereinigung $X = \biguplus_{i\in I} U_i$ von offenen Teilmengen $U_i \subset X$. Alle U_i sind dann als Komplement von $\biguplus_{j\neq i} U_j$ auch abgeschlossen in X. Für jede stetige Abbildung

$$\gamma : Q \to X$$

von einem zusammenhängenden top. Raum Q (etwa einem Quader $Q = \prod_{i=1}^r [a_i, b_i]$) nach X gilt dann

$$\exists \xi \in Q\ ,\ \gamma(\xi) \in U_i \quad \Longrightarrow \quad \gamma(Q) \subset U_i\ .$$

[Q ist zusammenhängend und die disjunkte Vereinigung der offen und abgeschlossenen Menge $\gamma^{-1}(U_i)$ und $\gamma^{-1}(U_i^c)$. Also $Q = \gamma^{-1}(U_i)$ oder $Q = \gamma^{-1}(U_i^c)$].

Definition. Eine Abbildung $p : X \to Y$ zwischen top. Räumen heißt *Überlagerung*, wenn gilt: *Jeder Punkt $y \in Y$ besitzt eine Umgebung $U \subset Y$ für die $p^{-1}(U) \subset X$ in eine disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen $U_i \subset X$ zerfällt*

$$(*) \qquad p^{-1}(U) = \biguplus_{i\in F} U_i\ ,$$

so daß alle eingeschränkten Abbildungen

$$(**) \qquad p : U_i \to U$$

Homöomorphismen sind.

Im Fall (*) und (**) nennen wir eine offene Teilmenge $U \subset Y$ *gut* (oder p-*gut*). Offene Teilmengen einer p-guten Menge sind wieder p-gut.

Bemerkung 1. Überlagerungen sind stetige und offene Abbildung, d.h. Bilder offener Menge sind offen.

Bemerkung 2. Sind $p_i : X_i \to Y$ Überlagerungen, dann ist auch die disjunkte Vereinung $p = \biguplus p_i : \biguplus_i X_i \to Y$ eine Überlagerung. Ist $p : X \to Y$ eine Überlagerung und Y eine Mannigfaltigkeit, und ist $X = \biguplus_i X_i$ die Zerlegung von X in Zusammenhangskomponenten, dann ist $p|_{X_i} : X_i \to Y$ eine Überlagerung. [Für p-gutes und obdA zusammenhängendes U gilt $p^{-1}(U) =$

$\biguplus U_i$, und $X_i \cap U_i$ ist aus Zusammenhangsgründen entweder U_i oder $\emptyset$, da $U_i \cong U$ zusammenhängend ist.]

Bemerkung 3. Für $y \in U$ liegt wegen (**) in jedem U_i genau ein Punkt x der Faser $p^{-1}(y)$. Die Indexmenge F kann daher mit der Faser $p^{-1}(y)$ identifiziert werden. Gilt $x \in U_i$ für $x \in p^{-1}(y)$, dann schreiben wir auch U_x anstelle von U_i, und nennen U_x das *Blatt* von x über U. Für verschiedene $x' \neq x$ in der Faser F gilt offensichtlich

$$U_x \cap U_{x'} = \emptyset \ .$$

Bemerkung 4. Für $Y' \subset Y$ (versehen mit der Einschränkungstopologie) ist die Einschränkung einer Überlagerung $p : p^{-1}(Y') \to Y'$ wieder eine Überlagerung.

Bemerkung 5. Sei Y eine Mannigfaltigkeit. Sind $p = p_1 \circ p_2$ und $p_2 : Z \to Y$ Überlagerungen und ist $p_1 : X \to Z$ stetig und surjektiv, dann ist auch p_1 eine Überlagerung.

[Der Durchschnitt U einer p-guten Umgebung von y mit einer p_1-guten Umgebung von y, ist p- und p_1-gut. Jede zusammenhängende offene Teilmenge U ist dann p- und p_1-gut mit $\biguplus_j U_j = p^{-1}(U) = p_1^{-1}(p_2^{-1}(U)) = p_1^{-1}(\biguplus_i V_i) = \biguplus_i p_1^{-1}(V_i)$. Die $U_j \cong U$ sind die Zusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$. Bilder zusammenhängender Mengen unter der stetigen Abbildung p_1 sind wieder zusammenhängend. Also ist $p_1(U_j)$ zusammenhängend. Aus Zusammenhangsgründen folgt $p_1(U_j) \cap V_i = p_1(U_j)$ (die Menge dieser j sei J) oder $p_1(U_j) \cap V_i = \emptyset$. Im ersten Fall gilt $p_1(U_j) \subset V_i$. Anwenden des Homöomorphismus $p_2 : V_i \to U$ zeigt $p_1(U_j) = V_i$ wegen $p_2(p_1(U_j)) = p(U_j) = U$. Also $p_1^{-1}(V_i) = \biguplus_{j \in J} U_j$, denn $(p|_{U_j})$ und $p_2|_{V_i}$ sind Homöomorphismen und wegen $p_2|_{V_i} \circ p_1|_{U_j} = p|_{U_j}$ gilt dies dann auch für $p_1 : p_1|_{U_j} \to V_i$.]

Existenz und Eindeutigkeit von Lifts

Sei $p : X \to Y$ eine stetige Abbildung, und sei

- $\gamma : I \to Y$ ein stetiger Weg mit $\gamma(0) = y_0$
- $x_0 \in X$ ein Punkt mit $p(x_0) = y_0$.

Ein Lift von γ ist dann ein stetiger Weg $\tilde{\gamma} : I \to X$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & Y \end{tikzcd}$$

mit

$$p \circ \tilde{\gamma} = \gamma \, .$$

Lokale Lifts. Über jeder guten Teilmenge $U \subset Y$ einer Überlagerung $p : X \to Y$ existiert ein ‘lokaler’ Lift. D.h. für $[a, b] \subset I$ mit $\gamma|_{[a,b]} : [a, b] \to U$ und ein beliebiges gewähltes Blatt U_x über U ist

$$\tilde{\gamma} = (p|U_x)^{-1} \circ \gamma$$

ein Lift von $\gamma|_{[a,b]}$.

Eindeutigkeitslemma. *Für eine Überlagerung p ist ein Lift von γ durch seinen Anfangspunkt x_0 eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die Menge J der Punkte in I, wo zwei Lifts übereinstimmen, ist nicht leer ($0 \in J$ Anfangspunkt !). Wir zeigen J ist offen und abgeschlossen, und damit $J = I$. Für jedes $t_0 \in I$ wählen wir dazu eine gute Umgebung $U \subset Y$ von $\gamma(t_0)$ und setzen $V = \gamma^{-1}(U)$.

Sei nun $t_0 \notin J$ oder anders gesagt

$$x = \tilde{\gamma}(t_0) \quad \neq \quad x' = \tilde{\gamma}'(t_0) \, .$$

Aus $x', x \in F = p^{-1}(\gamma(t_0))$ und der Vorbemerkung folgt dann $\tilde{\gamma}|_V \subset U_x$ und $\tilde{\gamma}'|_V \subset U_{x'}$. Wegen $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$ enthählt also das Komplement von J auch die offene Menge V um t_0, ist also offen.

Andererseits ist J selbst offen, denn stimmen zwei Lifts im Punkt t_0 überein, dann auch in der offenen Umgebung V von t_0. Dies ist wiederum eine unmittelbare Konsequenz der Vorbemerkung und der Eigenschaften (*) und (**). QED

Liftungslemma. *Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung. Dann besitzt jeder stetige Weg $\gamma : I \to Y$ einen Lift zu vorgegebenem Anfangspunkt $x_0 \in p^{-1}(y_0)$.*

Beweis. Die Menge J aller $t \in I$ mit der Eigenschaft ”Der gesuchte Teillift

$$\tilde{\gamma}|_{[0,t)} : [0,t) \to X$$

existiert” ist nicht leer [da der lokale Lift auf einer guten Umgebung des Anfangspunktes y_0 existiert]. Wie man leicht (!) aus der Definition sieht, gilt dann $t_0 = sup(J) \in J$. Es genügt den Lift auf eine Umgebung von

$$t_0 = sup(J) = max(J)$$

fortzusetzen. Sei dazu $U \subset Y$ eine gute Umgebung von $y = \gamma(t_0)$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\gamma([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]) \subset U$ (Stetigkeit von γ) und ein $t_1 \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$. Setze $x = \tilde{\gamma}(t_1) \in X$. Auf Grund unserer Annahmen existiert dann auf U ein (a priori möglicherweise anderer) lokaler Lift

$$\tilde{\gamma}' : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to p^{-1}(U)$$

von γ mit der Vorgabe

$$\tilde{\gamma}'(t_1) = x = \tilde{\gamma}(t_1) \in X \ .$$

Als Lifts von γ stimmen dann wegen dieser Vorgabe $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}'$ auf $[t_0 - \varepsilon, t_1]$ überein (Eindeutigkeitslemma !). Also verheften sich beide Lifts zu einer stetigen Abbildung. Dies setzt $\tilde{\gamma}$ stetig als Lift auf eine Umgebung von $t_0 \in I$ fort. Aus der Minimalität von t_0 folgt daher $t_0 = 1$, sowie die stetige Fortsetzbarkeit von $\tilde{\gamma}$ vom Bereich aller $0 \leq t < t_0 = 1$ auf den Bereich $0 \leq t \leq t_0 = 1$. QED

Homotopie-Liftungslemma. *Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung. Dann besitzt jede stetige Homotopie $H : I^2 \to Y$ einen stetigen Lift $\tilde{H} : I^2 \to X$ bei vorgegebenem Anfangswert $H(s, 0) = x_0 \in p^{-1}(y_0)$.*

Beweis. $H(s, t)$ ist eine Familie von stetigen Kurven $\gamma_s(t) = H(s, t)$. Diese lassen sich (wie bereits gezeigt) einzeln liften zu Kurven $\tilde{\gamma}_s$. Dies definiert

$$\tilde{H}(s, t) := \tilde{\gamma}_s(t) \ .$$

Es bleibt zu zeigen, daß $\tilde{H} : I^2 \to X$ stetig ist. Per Definition ist $\tilde{H}$ stetig in t bei fest gehaltenem s. Wie im letzten Lemma benutzt man die Existenz eines ”maximalen” t_0 für das $H(s, t)$ noch stetig ist auf $I \times [0, t_0) \subset I^2$. Für die Stetigkeit von $\tilde{H}$ auf ganz I^2 genügt wiederum die Stetigkeit von $\tilde{H}$ in allen Punkten $(s, t) \in I \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Dies ist eine lokale Frage und man kann Y durch eine gute Umgebung U von $y = H(s, t)$ und I^2 durch einen geeigneten Quader

$Q = [a, b] \times [a', b'] \subset I^2$ mit $H(Q) \subset U$ ersetzen. Es genügt dann die Blatttreue in folgendem Sinne zu zeigen

$$\tilde{H}(Q) \subset U_x \quad \text{falls} \quad x := \tilde{H}(s, t) \ ,$$

da dies sofort die lokale Stetigkeit von $\tilde{H}$ zeigt vermöge

$$\tilde{H}|_{I'} = p|_{U_x} \circ H_{I'} \ .$$

Bild:

Die Blatttreue. Aus der Vorbemerkung folgt $\tilde{H}(s_0, t) \in U_x$ für alle $t \in [a', b']$ (Stetigkeit in t bei festem s). Wähle ein t_1 mit $b' \leq t_1 < t_0$. Aus der Vorbemerkung folgt wiederum $\tilde{H}(s, t_1) \in U_x$ für alle $s \in [a, b]$ (Stetigkeit in s nach Definition von t_0). Schliesslich gilt auch $\tilde{H}(s, t) \in U_x$ für alle $t \in [a', b']$ (wieder die Stetigkeit in t bei festem s). QED

Die universelle Überlagerung $\tilde{X}$

Sei X eine Mannigfaltigkeit (topologisch, differenzierbar oder eine Riemannsche Fläche) und wegweise zusammenhängend. Wir fixieren einen Basispunkt $x_0 \in X$. Sei dann $\tilde{X}$ die Menge der Homotopieklassen $\gamma/\sim$ von (stetigen) Wegen $\gamma : I = [0,1] \to X$ in X mit Startpunkt in $\gamma(0) = x_0$. Da der Endpunkt $\gamma(1)$ nur von der Homotopieklasse von γ abhängt definiert $p(\gamma/\sim) = \gamma(1)$ eine wohldefinierte Abbildung

$$p : \tilde{X} \to X \ .$$

p ist surjektiv, da X zusammenhängend ist. Über x_0 liegt ein spezieller Punkt $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, die Homotopieklasse des konstanten Wegs x_0.

Die Topologie von $\tilde{X}$

Um $\tilde{X}$ mit einer Topologie zu versehen, genügt es eine Basis[1] der zu konstruierenden Topologie anzugeben. Wir wählen dazu einen geeigneten Atlas der Mannigfaltigkeit X, d.h. eine Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ durch offene Teilmengen mit Kartenabbildungen $\psi_i : X_i \cong V_i \subset \mathbb{R}^d$ derart, dass die Bildmengen $\psi_i(X_i)$ sternförmige offene Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ sind. Wir nehmen obdA an für jeden Punkt $x \in X$ gibt es ein X_i mit $x \in X_i$ so dass die Kartenabbildung ψ_i den Punkt x auf einen Sternmittelpunkt von $\psi_i(X_i)$ abbildet. Wir nennen einen solche Umgebung $U = X_i$ von $x \in X$ eine *gute* offene Umgebung von x. Man kann zusätzlich annehmen, daß mit X_i auch auch alle gestreckten Kartenmenge $X_i(t) = \psi_i^{-1}(t \cdot \psi_i(X_i))$ für $0 < t \leq 1$ im Atlas enthalten sind. Man sieht leicht, dass ein solcher Atlas existiert.

Definition der Basis von $\tilde{X}$. Gegeben sei eine Wegeklasse $\gamma/\sim$, also ein Punkt $\tilde{x}$ von $\tilde{X}$. Zu dem Endpunkt $x = p(\tilde{x})$ wählen wir eine gute Umgebung $U = X_i$ von x in X. Dem Paar $(U, \gamma/\sim)$ zugeordnet wird eine Teilmenge in $\tilde{X}$

$$\boxed{[U, \gamma/\sim] \ \subset \ \tilde{X}} \ ,$$

[1]Eine Basis $\mathcal{B}$ eines topologischen Raums ist einen Teilmenge der Menge aller offenen Menge, welche die Basis-Eigenschaft besitzt: B1) $U, V \in \mathcal{B} \Longrightarrow U \cap V \subset \bigcup_{i\in I} V_i$ für geeignete $V_i \in \mathcal{B}$, $i \in I$. B2) Eine Teilmenge ist offen, wenn sie mit jeder ihrer Punkte $\tilde{x}$ auch ein $V \in \mathcal{B}$ enthält mit $\tilde{x} \in V$. Beispiel: Die offenen Kugeln definieren einen Basis der Topologie des Euklidschen Raums. Jede Teilmenge $\mathcal{B}$ der Potenzmenge einer gegebenen Menge $\tilde{X}$ mit der Basis-Eigenschaft B1) definiert umgekehrt durch die Vorschrift B2) eine eindeutig bestimmte Topologie auf $\tilde{X}$, die von der Basis $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie.

nämlich die Menge aller Wegeklassen

$$(\overline{yx} \circ \gamma)/\sim \quad , \quad y \in U \ .$$

Hierbei bezeichne $\overline{yx}$ das das Urbild des linearen Verbindungswegs zwischen $\psi_i(x)$ und $\psi_i(y)$ in dem sternförmigen Gebiet $\psi_i(U)$ unter der Abbildung ψ_i. D.h. $\overline{yx}$ ist ein Weg in U mit Anfangspunkt x und Endpunkt y. Die Abbildung p bildet $[U, \gamma/\sim] \subset \tilde{X}$ bijektiv auf $U \subset X$ ab

$$p([U, \gamma/\sim]) \ = \ U \ .$$

Basiseigenschaft B1) .

Sei $\gamma/\sim$ im Durchschnitt von $[U', \gamma'/\sim]$ und $[U'', \gamma''/\sim]$. Das Bild x von $\gamma/\sim$ unter $p : \tilde{X} \to X$ liegt dann in $U' \cap U'' \subset X$. Sei U eine gute Umgebung U von x; ersetzt man U durch eine geschrumpfte Menge $U(t)$ kann man obdA annehmen $U \subset U' \cap U''$. Zum Beweis der Basiseigenschaft genügt

$$[U, \gamma/\sim] \ \subset \ [U', \gamma'/\sim]$$

und analog für $[U'', \gamma''/\sim]$, denn solche $[U, \gamma/\sim]$ überdecken sann den Durchschnitt (Eigenschaft B1). Zur benötigten Inklusion muss für $y \in U$ gezeigt werden

$$\overline{yx} \circ \gamma \ \sim \ \overline{yx'}' \circ \gamma' \quad .$$

Wegen $[\gamma/\sim] \in [U', \gamma'/\sim]$ gilt dies für $y = x$, also

$$\gamma \quad \sim \quad \overline{xx} \circ \gamma \quad \sim \quad \overline{xx'}' \circ \gamma' \ .$$

Einsetzen in die zu zeigende Identität reduziert auf eine Ausage in U, nämlich zu zeigen

$$\overline{yx} \circ \overline{xx'}' \ \sim \ \overline{yx'}'$$

Diese folgt unmittelbar aus dem Schlüssellemma[2], denn U ist homöomorph zu einen offenen sternförmigen Menge und damit einfach zusammenhängenden Menge im Euklidschen Raum.

[2]In einem einfach zusammenhängenden Raum sind je zwei Wege mit denselben Anfangspunkten und denselben Endpunkten zueinander homotop.

Wir betrachten nun eine fixierte offene Menge $[U', \gamma'/\sim]$ versehen mit der Einschränkungstopologie. Eine Basis dieser Einschränkungstopologie wird gegeben durch die Schnitte $[U', \gamma'/\sim] \cap \mathcal{B}$. Obiges Argument zeigt, daß man alternativ statt dieser Basis von $[U', \gamma'/\sim]$ die Menge aller $[U, \gamma/\sim]$ wählen kann mit $U \subset U'$ und obiger Bedingung an $\gamma/\sim$. Ersetzt man $[U', \gamma'/\sim]$ mittels der Bijektion p durch die Menge U', so entspticht dies genau den guten Teilmengen $U \subset U'$, denn für jedes U' gibt es γ, das die obige Bedingung erfüllt. Es folgt

Lemma. *Die bijektive Projektion*

$$p : [U', \gamma', /\sim] \longrightarrow U'$$

ist ein Homöomorphismus zwischen der offenen Teilmenge $[U', \gamma', /\sim] \subset \tilde{X}$ *versehen mit der Teilraumtopologie und der offenen Menge* $U' \subset X$. *Insbesondere ist* p *stetig.*

Beweis. Es genügt zu bemerken, daß die sternförmigen Karten $U \subset U'$ um Punkte $x \in U'$ mit "Sternmittelpunkt" x eine Basis der Topologie von U darstellen. Dies überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Separiertheit der Topologie

Gegeben seinen zwei verschiedene Punkte $\gamma'/\sim$ und $\gamma''/\sim$ in $\tilde{X}$ mit Bildpunkten x', x'' in X.

Für $U' \cap U'' = \emptyset$ sind $[U', \gamma'/\sim]$ und $[U'', \gamma''/\sim]$ disjunkt, da ihre Bilder unter p disjunkt sind. Da X separiert ist, zeigt dies die Separiertheit für $x' \neq x''$.

Im Fall $x' = x''$ definiert jeder Punkt

$$\gamma/\sim \quad \in \quad [U, \gamma'/\sim] \cap [U, \gamma''/\sim]$$

eine Homotopie $\overline{yx} \circ \gamma' \sim \gamma \sim \overline{yx} \circ \gamma''$. Anwenden von $\overline{yx}^-$ gibt $\gamma' \sim \gamma''$. Ein Widerspruch. Dies zeigt die Trennungseigenschaft und ausserdem die Eigenschaft $(*)$ von Überlagerungen

$$p^{-1}(U) \;=\; \biguplus_{\gamma/\sim \in F} [U, \gamma/\sim]\,,$$

wobei F die Homotopieklassen $\gamma/\sim$ von Wegen in X von x_0 nach x durchläuft. Aus dem letzten Lemma folgt aber auch die Eigenschaft (**) einer Überlagerung.

Korollar. *$p : \tilde{X} \to X$ ist eine Überlagerung.*

Da $\tilde{X}$ lokal so aussieht wie X, kann man den gewählten Atlas von X mit den guten Kartenmengen zu einem Atlas von $\tilde{X}$ machen durch Zusammensetzung der Kartenabbildungen von $\psi : U \to \psi(U) \subset \mathbb{R}^d$ mit den Projektionen

$$p : [U, \gamma/\sim] \ \cong \ U \ .$$

Korollar. *Ist X eine topologische (differenzierbare) Mannigfaltigkeit oder eine Riemannsche Fläche, dann gilt dasselbe für die Überlagerung $\tilde{X}$, und der Morphismus $p : \tilde{X} \to X$ ist stetig (differenzierbar) bzw. holomorph.*

Wichtige Eigenschaften

Sei X eine (wegweise) zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Wir haben gezeigt: Für $x_0 \in X$ definiert der topologische Raum

$$\tilde{X} \ = \ \{ \text{ Wege in } X \text{ mit Anfangspunkt } x_0 \ \}/ \text{ Homotopie}$$

mit der kanonischen Abbildung

$$p : \tilde{X} \to X \ ,$$

welche jeder Wegeklasse seinen Endpunkt zuordnet, eine Überlagerung. Man nennt diese Überlagerung die *universelle* Überlagerung von X. Die Faser $F = p^{-1}(x_0)$ ist $\pi_X(x_0, x_0)$. In F gibt es einen ausgezeichneten Punkt $\tilde{x}_0 = id_{x_0}$, die Klasse des konstanten Wegs von x_0 nach x_0.

Liftungsformel. *Sei $\tilde{x}_0 \in F$ die Klasse des konstanten Wegs. Sei $\gamma : I \to X$ ein stetiger Weg in X mit Anfangs- und Endpunkt x_0 und $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}$ der eindeutig bestimmte Lift von γ zum Anfangspunkt $\tilde{x}_0$. Dann gilt: Der Endpunkt in $F = \pi_X(x_0, x_0) \subset \tilde{X}$ ist*

$$\boxed{\tilde{\gamma}(1) \ = \ \gamma/\sim} \ .$$

Korollar 1. *Je zwei Punkte $\tilde{x}_0, \tilde{x}_0'$ in der Faser F über x_0 können durch einen Weg in $\tilde{X}$ verbunden werden.*

Korollar 2. *Ist X wegweise zusammenhängend, dann auch $\tilde{X}$.*

Beweis. Jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ kann mit einem Punkt $\tilde{x}_0'$ in der Faser über x_0 verbunden werden, wenn X zusammenhängend ist. Lifte dazu einen Weg in X von $p(x)$ nach x_0). Dann benutze Korollar 1.

Korollar 3. *Zwei Wege in X mit Anfangs- und Endpunkt x_0 sind homotop in X genau dann wenn ihre (eindeutig bestimmten) Lifts nach $\tilde{X}$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ denselben Endpunkt haben.*

Korollar 4. *$\tilde{X}$ ist einfach zusammenhängend.*

Beweis von Korollar 4. Seien $\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}$ Wege in $\tilde{X}$ von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}_0$. Per Definition sind sie die Lifts ihrer Bildwege $\gamma' = p \circ \tilde{\gamma}', \gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ in X. Da $\tilde{\gamma}'$ und $\tilde{\gamma}$ denselben Endpunkt $\tilde{x}_0$ in $\tilde{X}$ haben, folgt aus der Liftungs-Formel

$$\gamma' \sim \gamma \quad , \quad \text{in } \pi_X(x_0, x_0) \ .$$

Aus dem Homotopie Liftungslemma folgt dann

$$\tilde{\gamma}' \sim \tilde{\gamma} \quad , \quad \text{in } \pi_{\tilde{X}}(\tilde{x}_0, \tilde{x}_0) \ .$$

Da dies für alle $\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}$ gilt, ergibt sich $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 0$.

Beweis der Liftungsformel

γ sei ein Weg in X mit Anfangspunkt x_0. Bezeichne $\gamma_s : t \mapsto \gamma_s(t) := \gamma(st)$ den um s geschrumpften Weg. Dann gilt

- $\gamma_s(t)$ ist stetig in $t \in I$ mit Anfangspunkt $\gamma_s(0) = x_0$. Also ist für festes s die Wegeklasse $\gamma_s/\sim$ ein Punkt von $\tilde{X}$.
- Für $s = 0$ ist $\gamma_0(t) = \gamma(0) = x_0 = id_{x_0}(t)$ der konstante Weg in X.
- Der Endpunkt in X von γ_s ist $x := \gamma_s(1) = \gamma(s)$.
- $\gamma_s/\sim \ \in \pi_X(x_0, x) \subset \tilde{X}$.

Variiert man s, definiert dies eine Abbildung

$$\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}$$

vermöge $s \mapsto \gamma_s/\sim$. Der Endpunkt x von γ_s hängt dabei von s ab. Wir haben damit eine Zuordnung konstruiert

$$\{\text{ Wege in } X \text{ mit Anfangspunkt } x_0 \} \quad \longrightarrow \quad \{\text{ Wege in } \tilde{X} \text{ mit Anfangspunkt } \tilde{x}_0 \},$$

welche den Weg $\gamma : I \to X$ (parametrisiert durch die Variable t) auf $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}$ abbildet (parametrisiert via $\tilde{\gamma}(s) = \gamma_s/\sim$ durch die Variable s). Das folgende Diagramm ist kommutativ

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] & \ni \tilde{x}_0 \arrow[d] \\ I \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & X & \ni x_0 \end{tikzcd}$$

denn $p \circ \tilde{\gamma}(s) = p(\gamma_s/\sim) = \gamma(st)|_{t=1} = \gamma(s)$. Weiterhin gilt

1. Der Anfangspunkt $\tilde{\gamma}(0)$ in $\tilde{X}$ (bei $s = 0$) ist $\gamma_0/\sim = id_{x_0}/\sim = \tilde{x}_0$.
2. Der Endpunkt $\tilde{\gamma}(1)$ in $\tilde{X}$ (bei $s = 1$) ist $\gamma_1/\sim = \gamma/\sim$.
3. Ausserdem ist $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}$ stetig. Dies folgt aus dem nächsten Lemma (wenn man sich genau an die Definition der Basis der Topologie von $\tilde{X}$ erinnert).

Also ist $\tilde{\gamma}$ der eindeutig bestimmte Lift von γ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$. Die Liftungsformel folgt damit aus 2). QED

Lemma. *Sei $\Phi : I^2 \to X$ eine stetige Abbildung mit $\Phi(s,0) = x_0$. Setze $\gamma_s(t) = \Phi(s,t)$. Dann gilt: Für festes $s' \in I$ und alle s nahe genug bei s' gilt*

$$\gamma_s \quad \sim \quad \overline{yy'} \circ \gamma_{s'} \ .$$

Hierbei bezeichne $\overline{yy'}$ wie bisher die "Verbindungsgerade" von $y' = \gamma_{s'}(1)$ nach $y = \gamma_s(1)$ in einer beliebigen 'sternförmigen' Umgebung[3] *$U \subset Y$ von y'.*

Bild:

Beweis. Überdecke $\Phi(I^2)$ durch sternförmige offene Teilmengen $U_i \subset Y$; man legt in solchen Teilgebieten dann "Verbindungsgeraden $\gamma_i = \overline{y_i y_i'}$ mit $y_r = y, y_r' = y$ (siehe Bild). Dann gilt

$$\alpha_1 \sim \gamma_1 \circ \beta_1 \quad , ..., \quad \alpha_i \sim \gamma_i \circ \beta_i \circ \gamma_i^-$$

und $\alpha = \alpha_r \circ .. \circ \alpha_1 = \gamma_s$, da die U_i einfach zusammenhängend sind (bereits bewiesenes Schlüssellemma[4]), sowie $\beta = \beta_r \circ ... \circ \beta_1 = \gamma_{s'}$ sowie $\gamma_r = \overline{yy'}$. Aus der Homotopieassoziativität und $\gamma_i^- \circ \gamma_i \sim id_{y_i'}$ folgt dann

$$\alpha \sim \gamma_r \circ \beta \ .$$

Universalität

Sei Y eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $p : X \to Y$ eine Überlagerung. Sei $x_0 \in X$ ein fixierter Punkt und $y_0 \in Y$ sein Bildpunkt. Sei $p_Y : \tilde{Y} \to Y$ die universelle Überlagerung. Wir konstruieren eine stetige Abbildung $q : \tilde{Y} \to X$, welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Y} \arrow[dr, dotted, "\exists\, q"] \arrow[dd, "p_X"'] & \\
& X \arrow[dl, "p"] \\
Y &
\end{tikzcd}$$

Überlagerung

[3] d.h. eine Umgebung, welche unter einer geeigneten Kartenabbildung ϕ auf eine sternförmige Menge in $\mathbf{C}$ abgebildet wird mit Sternmittelpunkt $\phi(y')$

[4] Gilt $\pi_1(U_i) = 0$, dann sind je zwei Wege in U_i, die einen gemeinsamen Anfangspunkt und einen gemeinsamen Endpunkt besitzen, homotop in U_i

kommutativ macht.

Konstruktion von q. Für $\gamma/\sim$ in $\tilde{Y}$ wähle einen Repräsentant $\gamma : I \to Y, \gamma(0) = y_0$. Für den eindeutig bestimmten Lift $\tilde{\gamma} : I \to X$ mit $\tilde{\gamma}(0) = x_0$ setzen wir

$$q(\gamma/\sim) \;=\; \tilde{\gamma}(1) \;\in Y \;.$$

Dies ist wohldefiniert [denn für einen anderen Repräsentant $\gamma' \sim \gamma$ folgt aus dem Homotopieliftungslemma $\tilde{\gamma}' \sim \tilde{\gamma}$, und somit $\tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}(1)$]. Es gilt $p(q(\gamma/\sim)) = p(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = p_Y(\gamma/\sim)$. Also $p \circ q = p_X$. Man zeigt leicht: q ist stetig.

Lemma. *Ist X zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $p : X \to Y$ eine Überlagerung, dann ist auch*

$$q : \tilde{Y} \to X$$

eine Überlagerung.

Beweis. Jeder Punkt x kann mit x_0 durch einen Weg $\tilde{\gamma}$ verbunden werden. Setze $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, dann gilt $q(\gamma/\sim) = x$. Also ist q surjektiv. Nach Bemerkung 5 (Abschnitt Überlagerungen) ist q eine Überlagerung.

Satz. *Sei Y eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit $\pi_1(Y, y_0) = 0$. Sei*

$$p : X \to Y$$

eine Überlagerung und X zusammenhängend. Dann ist $p : X \to Y$ ein Isomorphismus.

Beweis. Es gilt $p_Y = p \circ q$. Wegen $\pi_1(Y, y_0) = 0$ ist p_Y ein Isomorphismus. Also $p \circ f = id_Y$ für $f := q \circ p_Y^{-1}$. Eine direkte Rechnung zeigt andererseits $f \circ p = id_X$. Für $x \in X$ wähle dazu einen Hilfsweg $\tilde{\gamma}$, der x_0 mit x verbindet. Sei γ in Y der Bildweg von y_0 nach $y = p(x)$. Dann gilt $f(p(x)) = f(y) = q(y)$, und per Definition $q(y) = \tilde{\gamma}(1)$ und damit gleich $(f \circ p)(x) = q(y) = x$. QED

Korollar 5. *Sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit $\pi_1(X, x_0) = 0$ und*

$$p : X \to Y$$

eine Überlagerung. Dann ist $q : \tilde{Y} \to X$ ein Isomorphismus.

Funktorialität

Sei $f : X \to Y$ stetig. Dann existiert eine stetige Abbildung $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$, welche folgendes Diagram kommutativ macht

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, dotted, "\exists\, \tilde{f}"] \arrow[d, "p_X"'] & \tilde{Y} \arrow[d, "p_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

definiert durch

$$\gamma/\sim \quad \mapsto \quad (f \circ \gamma)/\sim \ .$$

Kommutativität:

$$p_Y(\tilde{f}(\gamma/\sim)) = p_Y((f \circ \gamma)/\sim) = (f \circ \gamma)(1) = f(\gamma(1)) = f(p_X(\gamma/\sim)) \ .$$

Wir überlassen es dem Leser nachzuprüfen, dass $\tilde{f}$ stetig ist. Ist f ein Morphismus zwischen Mannigfaltigkeiten (diffbar, hol. etc), dann auch $\tilde{f}$.

Quotienten

Sei X eine Mannigfaltigkeit und Γ eine Gruppe von Morphismen, welche auf X operiert. $x, x' \in X$ heissen äquivalent unter Γ, wenn ein $\gamma \in \Gamma$ existiert mit $x' = \gamma(x)$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf X. Die Äquivalenzklassen nennt man Orbits von Γ auf X.

Sei $p : X \to X/\Gamma$ die Abbildung, welche jedem x seinen Orbit zuordnet. Versehe X/Γ mit der Quotiententopologie, d.h. $U \subset X/\Gamma$ ist offen gdw $p^{-1}(U)$ offen in X ist. Dann ist p stetig per Definition und außerdem offen, d.h.: Ist V offen in X, dann auch $p(V)$. [$p^{-1}(p(V)) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(V)$ ist offen als Vereinigung der offenen Mengen $\gamma(V)$]. Man sieht leicht, daß eine gegebene Topologie auf X/Γ die Quotiententopologie ist, wenn p stetig und offen ist. [Ist $p^{-1}(V)$ offen, dann auch $p(p^{-1}(V)) = V$.]

Die Operation heisst *frei*, wenn gilt

1. Für jedes $x \in X$ gibt es eine Umgebung U_x von x mit der Eigenschaft

$$\gamma(U_x) \cap U_x \neq \emptyset \Longrightarrow \gamma = 1 \ .$$

2. Sind x, y nicht äquivalent unter Γ, dann gibt es Umgebungen U_x von x und U_y von y mit $U_y \cap \gamma(U_x) = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

Aus 1) folgt: $\gamma(U_x) \cap \gamma'(U_x) \neq \emptyset$ impliziert $U_x \cap \gamma^{-1}\gamma'(U_x) \neq \emptyset$, damit $\gamma^{-1}\gamma' = 1$ wegen 1), also $\gamma = \gamma'$.

Eigenschaft 2) folgt bereits aus 1): Da X eine Mannigfaltigkeit ist, ist X lokalkompakt. Wählt man U_x in einem Kompaktum K, sind für 2) bei festem y nur endlich viele γ relevant. Wegen der Separiertheit von X kann man dann U_y und U_x endlich oft verkleinern so, daß 2) gilt.

Operiert Γ frei auf X, dann auch jede Untergruppe von Γ.

Beispiel. Sei $X = \mathbf{C}$ und $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau$ (für ein festes $\tau \in H$) operiere per Translation. Für $y = Im(\tau)$ gilt $|\gamma| \geq y$ für alle $\gamma \neq 0$ in Γ. Wählt man für U_x eine Kugel vom Radius $r < y/2$, dann ist Eigenschaft 1) und damit 2) erfüllt.

Lemma. *Ist die Operation von Γ auf X frei, dann ist $p : X \to X/\Gamma$ eine Überlagerung.*

Beweis. Für $\overline{x} \in X/\Gamma$ sei $x \in X$ ein Repräsentant. Wähle $V = U_x$ wie in 1). Dann ist $U = p(V)$ offen in X/Γ und $p^{-1}(U) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(V) = \biguplus_{\gamma \in \Gamma} \gamma(V)$, denn $\gamma(V) \cap \gamma'(V) \neq \emptyset$ impliziert $\gamma' = \gamma$ wegen 1). Es bleibt zu zeigen, daß p die Mengen $\gamma(V)$ homöomorph auf U abbildet. Da p stetig und offen ist, genügt dazu die Bijektivität. Surjektivität gilt per Definition von U und wegen $p = p \circ \gamma$.

Injektivität. Für $x, x' \in V$ gelte $p(x') = p(x)$, also $x' = \gamma(x)$ für ein γ aus Γ. Dann ist $x' \in \gamma(U_x) \cap U_x$. Daraus folgt $\gamma = 1$ wegen 1). Also $x' = x$. QED.

Lemma. *Ist die Operation von Γ auf X frei, dann ist X/Γ eine Mannigfaltigkeit und $p : X \to X/\Gamma$ ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten.*

Beweis. Aus Eigenschaft 2) folgt, daß X/Γ als top. Raum separiert ist. Da p eine Überlagerung ist, findet man leicht Karten auf einer guten Menge durch Karten auf X, derart daß alle Kartenwechsel die gewünschten Eigenschaften haben. QED

Ist U ein Normalteiler[5] in Γ und operiert Γ frei auf X, dann induziert dies eine freie Operation von Γ auf den U-Orbits und damit auf X/U. Man zeigt leicht

$$(X/U)/(\Gamma/U) = X/\Gamma \ .$$

[5] D.h. es gelte $\gamma U \gamma^{-1} = U$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Damit ist einerseits die Faktorgruppe Γ/U erklärt. Andererseits gilt $\gamma(Ux) = \gamma U \gamma{-}1\gamma(x) = U(\gamma(x))$. Mit anderen Worten: γ bildet den U-Orbit von x auf den U-orbit von $\gamma(x)$ ab.

Die Operation von $\pi_1(Y, y_0)$ auf $\tilde{Y}$

Sei Y eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit.

Die Homotopieklasse eines Weges in Y mit Anfangspunkt y_0 kann verknüpft mit der Homotopieklasse eines Weges von y_0 nach y_0. Dies führt zu einer Operation der Fundamentalgruppe auf $\tilde{Y}$. Genauer: Die Fundamentalgruppe $\Gamma = \pi_1(Y, y_0)$ von Y operiert auf der universellen Überlagerung $\tilde{Y}$ von Y vermöge

$$(\gamma/\sim) \times (\tilde{\gamma}'/\sim) \quad \mapsto \quad (\gamma' \circ \gamma^{-1}/\sim)$$

(für $\gamma'/\sim$ in $\tilde{Y}$) so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Y} \arrow[rr, "\gamma/\sim"] \arrow[dr, "p_Y"'] & & \tilde{Y} \arrow[dl, "p_Y"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

kommutativ sind. Man sagt daher oft, Γ operiert durch *Deckbewegungen*. Die Orbits dieser Operation sind offensichtlich die Mengen

$$\pi_Y(y_0, y)$$

da $\Gamma = \pi_Y(y_0, y_0)$ einfach transitiv auf $\pi_Y(y_0, y)$ operiert (Eigenschaft des Fundamentalgruppoids). Der Orbit ist daher durch y festgelegt. Die Menge $\tilde{Y}/\Gamma$ kann daher mit Y identifiziert werden und die Orbitquotientenabbildung p durch die Abbildung $p_Y : \tilde{Y} \to Y$.

Satz. *Die Fundamentalgruppe operiert frei auf $\tilde{Y}$ und die Quotientenabbildung $\tilde{Y} \to \tilde{Y}/\Gamma$ kann mit der Abbildung $p_Y : \tilde{Y} \to Y$ identifiziert werden.*

Beweis. Da die Überlagerungsabbildung stetig und offen ist, ist die Quotiententopologie auf Y damit die gegebene Topologie auf Y. Für $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ sei U einen gute Umgebung von $p(\tilde{y})$. Dann gilt $p^{-1}(U) = \biguplus_i U_i$. Γ operiert auf $p^{-1}(U)$, und permutiert die Zusammenhangskomponenten U_i. Diese werden durch die Faser $p^{-1}(y) = \pi_Y(y, y)$ parametrisiert. Aus der Fundamentalgruppoid-Eigenschaft ergibt sich daher, daß die U_i mit den Mengen $\gamma(U_1), \gamma \in \Gamma$ identifiziert werden können. Hierbei sei U_1 die Teilmenge, die $\tilde{y}$ enthält. Also operiert Γ frei auf $\tilde{Y}$.

Zu jeder Überlagerung $p : X \to Y$ mit *zusammenhängendem* X hatten wir bereits eine Überlagerung $q : \tilde{Y} \to X$ konstruiert, welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Y} \arrow[dd, "p_X"'] \arrow[dr, dotted, "q"] & \text{Überlagerung} \\
& X \arrow[dl, "p"] \\
Y & \text{Überlagerung}
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Aus Korollar 5 folgert man, dass $\tilde{X} \to \tilde{Y}$ ein Isomorphismus ist, d.h.

$$q : \tilde{Y} \to X$$

ist die universelle Überlagerung von X.Die Abbildung p induziert eine Abbildung $p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) = \Gamma$. Aus dem Homotopie-Liftungslemma folgt, dass diese Abbildung injektiv ist. Das Bild U

$$U \hookrightarrow \Gamma$$

ist zu $\pi_1(X, x_0)$ isomorph. Die Fundamentalgruppe U operiert daher auf $\tilde{Y}$ derart, dass gilt

$$X \cong \tilde{Y}/U \quad , \quad U \cong \pi_1(X, x_0) \; .$$

Abelsche Überlagerungen

Sei A eine abelsche Gruppe. Wir nennen eine Mannigfaltigkeit X einen A-*Raum*, wenn A operiert frei auf X operiert. Dies definiert eine Überlagerung

$$p : X \to X/A = Y \; .$$

Ein A-Morphismus $f : X \to X'$ von A-Räumen ist ein Morphismus mit der Eigenschaft $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$.

Sei $b : Y \to A$ eine lokalkonstante Funktion. Wir fassen b vermöge $b(x) := b(p(x))$ dann auch als Funktion $b : X \to A$ auf. Für diese gilt dann $b(a \cdot x) = b(x)$.

Jede lokalkonstante Funktion $b : Y \to A$ definiert einen A-Morphismus von X vermöge $f_b(x) := b(x) \cdot x$, denn $f_b(a \cdot x) = a \cdot f_b(x)$ wegen

$$b(a{\cdot}x){\cdot}(a{\cdot}x) = b(x){\cdot}(a{\cdot}x) = (b(x){\cdot}a){\cdot}x = (a{\cdot}b(x)){\cdot}x = a{\cdot}(b(x){\cdot}x) = a{\cdot}f_b(x)\ ,$$

da A abelsch ist! Ein A-Morphismus $X \to X'$ induziert einen Morphismus $X/A \to X'/A$ der Quotientenräume. Ein A-Raum heisst trivial, wenn er als A-Raum isomorph ist zu $A \times Y$ mit der Operation $a' \cdot (a, y) = (a' + a, y)$.

Lemma. *Sei $X = A \times Y$ ein trivialer A-Raum. Die Gruppe der A-Isomorphismen von X, welche die Identität auf Y induzieren, ist isomorph zu A und wird erzeugt von den f_b für $b \in A$.*

Kozykel. Sei X ein A-Raum mit Quotient $Y = X/A$. Für einen geeignet gewählten Atlas $\mathcal{U}$ von Y aus guten zusammenhängend gewählten Karten gilt für die $U_i \in \mathcal{U}$, daß $p^{-1}(U_i)$ als A-Raum trivial ist. Also gibt es einen A-Isomorphismus, der mit der Operation von A verträglich ist

$$\psi_i : p^{-1}(U_i) \cong A \times U_i\ .$$

Bei einem Kartenwechsel zu $U_i \supset U_i \cap U_j \subset U_j$ hat man daher einen zusammengesetzten A-Isomorphismus $\psi_{ji} = \psi_j^{-1}|_{U_i \cap U_j} \circ \psi_i|_{U_i \cap U_j}$

$$\psi_{ji} :\quad (A \times U_i)|_{U_i \cap U_j} \cong p^{-1}(U_i \cap U_j) \cong (A \times U_j)|_{U_i \cap U_j}\ .$$

Es gilt notwendigerweise

$$\psi_{ji}(a, u) = (a + a_{ji}(u), u)$$

für eine lokalkonstante Funktion $a_{ji} : U_i \cap U_j \to A$. Aus der Definition von ψ_{ji} folgen die

Kozykelrelationen: $\qquad a_{kj}(u) + a_{ji}(u) = a_{ki}(u) \quad , \quad \forall u \in U_i \cap U_j \cap U_k$

sowie $a_{ii}(u) = 0$ auf U_i. Man nennt eine beliebige Kollektion lokal konstanter Funktionen $a_{ji}(u) : U_i \cap U_j \to A$ einen Cech-Kozyklus zu der Überdeckung $\mathcal{U}$, wenn die obigen Kozykelgleichungen für alle $U_i, U_j, U_k \in \mathcal{U}$ gelten.

Die Mannigfaltigkeit Y kann vollständig aus den Karten U_i und den Verheftungen entlang der Durchschnitte rekonstruiert[6] werden. Analog gilt dies für den A-Raum

[6] $Y = \biguplus U_i/\sim$ mit der Äquivalenzrelation $u_i \sim u_j$ gdw u_i und u_j denselben Punkt in U_{ij} definieren.

X. Aus der Kenntnis des Cech-Kozyklus kann man den A-Raum X vollständig rekonstruieren durch Verheften von A-Karten

$$A \times U_i \quad , \quad U_i \in \mathcal{U}$$

entlang der Durchschnitte $U_i \cap U_j$ mit Hilfe der A-Kartenwechselabbildungen $\psi_{ij}(u)$. Zur wohldefinierten Konstruktion einer solchen Verheftung braucht man nur die Kozyklerelationen[7]. Dies zeigt, da man für einen beliebigen Chech-Kozyklel einen A-Raum X zusammenkleben kann, und es gilt $X/A = Y$.

Lemma. *Seien a_{ji} und a'_{ji} Kozykel für $\mathcal{U}$. Seien X, X' die zugehörigen A-Räume. Dann gibt es einen Isomorphism $f : X \to X'$ von A-Räumen, welcher auf Y die Identität induziert, genau dann wenn es Elemente $a_i \in A$ gibt mit*

$$a'_{ji}(u) - a_{ji}(u) = a_j - a_i \quad , \quad u \in U_i \cap U_j \quad , \quad \forall\, i, j \; .$$

[7] $X = (\biguplus A \times U_i)/ \sim$ mit $(a, u_i) \sim (a', u_j)$ genau dann wenn u_i und u_j denselben Punkt $u \in U_{ij}$ definieren und wenn gilt $a' = a + a_{ij}(u)$. Die Kozykelrelationen zeigen, daß dies eine Äquivalenzrelation definiert.